

51
5134

МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{a} n dS$$

VII

В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова,
В.Д. Морозова

**КРАТНЫЕ
И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ПОЛЯ**

Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана

**Математика в техническом
университете**

Выпуск VII

*К 175-летию
МГТУ им. Н.Э. Баумана*

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В. С. Зарубина и А. П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций
одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций
многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций
одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы.
Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования
и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения
математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций
- XXI. Математическое моделирование в технике

В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Под редакцией

д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание второе, стереотипное

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2003

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.161.1

Г12

Рецензенты: проф. Д.В. Георгиевский, проф. А.П. Фаворский

Г12 Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).

ISBN 5-7038-1767-6 (Вып. VII)

ISBN 5-7038-1270-4

Книга является седьмым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“. Она знакомит читателя с кратными, криволинейными и поверхностными интегралами и с методами их вычисления. В ней уделено внимание приложениям этих типов интегралов, приведены примеры физического, механического и технического содержания. В заключительных главах изложены элементы теории поля и векторного анализа.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 112. Табл. 5. Библиогр. 46 назв.

*Выпуск книги финансировал
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана*

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.161.1

© В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова,
В.Д. Морозова, 2001

© Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 2001

ISBN 5-7038-1767-6 (Вып. VII)

ISBN 5-7038-1270-4

© Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 2001

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходится вычислять по двумерным, трехмерным (и в общем случае многомерным) областям, по кривым и поверхностям. Такие интегралы играют важную роль при исследовании скалярных и векторных полей, задаваемых в пространстве действительными и векторными функциями векторного аргумента, составляющими предмет изучения теории поля и векторного анализа.

Эта книга является седьмым выпуском серии учебников „Математика в техническом университете“. При отборе и изложении материала авторы старались учесть существующие различия в его объеме, характерные для программ подготовки по различным инженерным специальностям.

Содержание книги тесно связано с материалом предшествующих выпусков: дифференциальным и интегральным исчислением функций одного действительного переменного, аналитической геометрией и линейной алгеброй. При ссылке в тексте на конкретный выпуск этой серии учебников его номер указан римской цифрой. Например, запись [I-2.4] означает ссылку на четвертый параграф второй главы первого выпуска. Ссылки в пределах этой книги набраны прямым полужирным шрифтом. Например, ссылка (см. 2.1) указывает на первый параграф второй главы, а (см. Д.7.2) отсылает ко второму дополнению главы 7. Определения, теоремы, замечания, примеры, формулы, рисунки и т.п. имеют двойную нумерацию. Например, теорема 1.2 — это вторая теорема в главе 1, (2.1) — первая формула в главе 2, рис. 7.3 — третий рисунок в главе 7.

Большинство используемых в этой книге обозначений введено в первом выпуске серии. В перечне основных обозначений данного выпуска наряду с их краткой расшифровкой указаны ссылки на разделы этого и других выпусков серии, в которых можно найти их более подробное объяснение. После этого перечня приведены написание и русское произношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все термины, выделенные в тексте *полужирным курсивом*, с указанием страницы, где они определены или описаны. Выделение термина (при его первом упоминании в каждом параграфе) *светлым курсивом* означает, что в этом параграфе он отнесен к ключевым словам и читателю должно быть известно его значение. Уточнить смысл термина можно, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу, на которой используемый термин определен или описан. Если термин введен в другом выпуске, то его номер в предметном указателе обозначен римской цифрой перед номером страницы (например, I-217). Светлым курсивом даны ссылки на страницы этого и других выпусков, указывающие некоторые пояснения или уточнения термина. Такое построение предметного указателя связывает материал всех выпусков серии „Математика в техническом университете“ единым справочным аппаратом, удобным для поиска нужной информации.

Перед чтением этой книги предлагаем в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. В конце каждого задания указан номер того выпуска, в котором при возникновении затруднений можно найти все необходимые сведения. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным шрифтом**, далее будем считать известными (в основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в ее предметный указатель).

Задания для самопроверки

1. Запишите представления множеств **целых** \mathbb{Z} и **рациональных** \mathbb{Q} чисел при помощи множества \mathbb{N} **натуральных** чисел. Что является элементом декартова произведения \mathbb{R}^2 двух множеств \mathbb{R} **действительных** чисел? Что такое **объединение**, **пересечение** и **разность** множеств? [I]

2. Убедитесь, что если для образов $Y_1 \subset Y$ и $Y_2 \subset Y$ отображения $f: X \rightarrow Y$ справедливо включение $Y_1 \subset Y_2$, то для их прообразов $X_1 = f^{-1}(Y_1) \subset X$ и $X_2 = f^{-1}(Y_2) \subset X$ справедливо включение $X_1 \subset X_2$. [I]

3. Перечислите свойства **абсолютной величины** (модуля) числа. Запишите **неравенство** треугольника. [I]

4. Каков ход доказательства по методу **математической индукции**? Что понимают под **рекуррентным соотношением**? [I]

5. Каковы свойства **точных** **верхней** и **нижней** **граней** **ограниченного** множества точек **числовой** **прямой**? [I]

6. Что называют ϵ -**окрестностью** точки в \mathbb{R}^n ? Является ли **граничная** точка множества его **предельной** **точкой**? Приведите пример множества в \mathbb{R}^n , не имеющего ни одной **внутренней** точки. Что называют **диаметром**, **границей** и **внутренностью** множества? Какие множества называют **открытыми**, **замкнутыми**, **компактными** (**компактами**), **линейно связными**? [I], [V]

7. Изобразите на плоскости с заданной **прямоугольной** **декартовой** **системой** **координат** Oxy множество точек $D = \{(x; y): x \in (-1, 1], \sqrt{4-x^2} \leq y < 4-x^2\}$. [I], [III]

8. Каков смысл символов o и O при сравнении **бесконечно** **малых**? Напишите **формулу** **Тейлора** с **остаточным** **членом** в **форме** **Пеано** и в **форме** **Лагранжа**. [I], [II]

9. Сформулируйте и запишите **определение** **предела** **действительной** **функции** **действительного** **переменного** в

заданной точке. Перечислите свойства функций, имеющих в точке конечный предел. [I]

10. Сформулируйте и запишите определение предела векторной функции многих переменных в точке. Что можно сказать о пределах в той же точке ее координатных функций? [V]

11. Сформулируйте определение функции многих переменных, непрерывной в точке и непрерывной на множестве. Перечислите свойства функций многих переменных, непрерывных на компактах. Можно ли утверждать, что функция многих переменных, непрерывная в области, ограничена в этой области? Что называют точкой разрыва функции многих переменных? [V]

12. Можно ли утверждать, что если все частные производные первого порядка функции непрерывны в точке, то функция дифференцируема в этой точке? В каком случае смешанные производные такой функции не зависят от порядка дифференцирования? Является ли дважды дифференцируемая в точке функция многих переменных непрерывной дифференцируемой функцией в этой точке? [V]

13. Что называют неявной функцией? Сформулируйте теорему о неявной функции. [II], [V]

14. Определите, для каких из следующих функций неопределенный интеграл относят к неберущимся интегралам: $\sin^2 x$, $\sin(x^2)$, $\frac{\cos x}{x}$, xe^{-x^2} , e^{-x^2} , $\ln x$, $\frac{1}{\ln x}$. [VI]

15. Найдите градиент функции $f(x, y) = 2x^2 + 3y$ в точке $(1; 1)$ и производную этой функции в точке $(1; 1)$ по направлению вектора $l = 3i - 4j$. Изобразите линии уровня этой функции. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 5$ в точке $(1; -1; 1)$. [V]

16. Можно ли использовать формулу Ньютона — Лейбница для вычисления определенного интеграла с нижним a и верхним b пределами интегрирования от подынте-

гальной функции $f(x)$, если известна первообразная $F(x)$ этой функции в полуинтервалах $[a, c)$ и $(c, b]$? [VI]

17. Сформулируйте и запишите определение предела интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. [VI]

18. Что называют интегралом Римана? Приведите пример интегрируемой по Риману функции и пример неинтегрируемой функции. [VI]

19. Что называют квадратуемой плоской фигурой и кубируемым телом? Выразите при помощи определенного интеграла: а) длину плоской гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$; б) площадь плоской фигуры D , заданной неравенствами $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$; в) объем тела и площадь поверхности, образованных вращением вокруг оси абсцисс графика дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$. [VI]

20. Опишите суть основного подхода к проблеме численного интегрирования. Что называют квадратурной формулой и погрешностью квадратурной формулы? [VI]

21. Является ли кусочно гладкая плоская замкнутая кривая спрямляемой? [II]

22. Запишите канонические уравнения эллипса с большой a и малой b полуосями, гиперболы с действительной a и мнимой b полуосями и параболы с фокальным параметром p , прямого кругового конуса, трехосного эллипсоида и гиперболического параболоида. [III]

23. Какие геометрические векторы называют коллинеарными, компланарными, сонаправленными, противоположно направленными, ортогональными? Укажите какой-либо базис в V_3 . Какова ориентация этого базиса? [III]

24. Сформулируйте основные свойства скалярного произведения, векторного произведения и смешанного произведения. Что произойдет с каждым из этих произведений, если поменять местами два сомножителя? Запишите формулы

вычисления скалярного, векторного и смешанного произведений в ортонормированном базисе. Как связаны площадь параллелограмма и объем параллелепипеда с векторным и смешанным произведениями векторов? [III]

25. Как вычислить определитель третьего порядка с помощью правила Саррюса? Как вычислить смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе? [III]

26. Перечислите основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Как интегрируют эти уравнения? [VIII]

27. Сформулируйте теорему Коши существования и единственности решения ОДУ первого порядка. Сравните ее с теоремой Коши существования и единственности решения ОДУ первого порядка, не разрешенного относительно производной. [VIII]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания, теоремы без доказательства
- \approx — знак приближенного равенства
- \equiv — знак тождественного равенства
- \emptyset — пустое множество I-1.1
- $a \in A$ — a принадлежит множеству A I-1.1
- $a \notin A$ — a не принадлежит множеству A I-1.1
- $\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c I-1.1
- $\{x: P\}$ — множество, состоящее из элементов x , обладающих свойством P I-1.1
- $A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B I-1.2
- $A \setminus B$ — разность множеств A и B I-1.4
- $A \cup B$ — объединение множеств A и B I-1.4
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B I-1.4
- \mathbb{R} — множество действительных чисел I-1.3
- \mathbb{R}^n — n -мерное линейное арифметическое пространство IV
- $\text{int } M$ — внутренность (множество внутренних точек) множества $M \subset \mathbb{R}^n$ 1.2
- \forall — квантор всеобщности ($\forall x$ — для любого x) I-1.5
- \exists — квантор существования ($\exists x$ — существует x) I-1.5
- $f: X \rightarrow Y$ — отображение f множества X в (на) множество Y I-2.1
- $f(G)$ — образ множества G при отображении f I-2.1

- $f^{-1}(Y)$ — прообраз множества Y при отображении f I-2.1
- $\sum_{k=1}^N a_k$ — сумма слагаемых a_1, a_2, \dots, a_N I-2.6
- $\prod_{k=1}^N a_k$ — произведение N сомножителей a_1, a_2, \dots, a_N I-2.6
- $k = \overline{1, N}$ — число k принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до N включительно I-2.6
- w и $|w|$ — геометрический вектор и его длина III
- $ab, (a, b)$ — скалярное произведение векторов a и b III
- $a \times b$ — векторное произведение векторов a и b III
- abc — смешанное произведение векторов a, b и c III
- (a_{ij}) — матрица типа $m \times n$, составленная из элементов a_{ij} III
- I_n, E — единичная матрица порядка n III
- 0 — нулевой вектор в \mathbb{R}^n IV
- A^T — матрица, транспонированная к матрице A III
- A^{-1} — матрица, обратная к матрице A III
- $\det A, |A|$ — определитель квадратной матрицы A III
- $\text{Rg } A$ — ранг матрицы A III
- $\|a\|$ — евклидова норма элемента a в евклидовом пространстве IV
- $o(h)$ — величина более высокого порядка малости, чем h I-10.1
- $\delta(x)$ — δ -функция Дирака XII
- a^* — число, комплексно сопряженное к числу a I-4.3
- $d(T)$ — диаметр разбиения T 1.2
- \int — знак неопределенного, определенного, криволинейного интегралов VI, 5.1

$\iint_D f(x, y) dx dy$ — двойной интеграл от функции $f(x, y)$ с областью интегрирования D 1.2

$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ — тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ с областью интегрирования D 2.2

$\oint_L f(\mathbf{r}) ds$ — криволинейный интеграл по замкнутому контуру L 5.3

$\iint_S f(x, y, z) dS$ — поверхностный интеграл по поверхности S 6.1

$\oiint_S f(x, y, z) dS$ — поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S 6.1

$\text{grad } u(M)$ — градиент скалярного поля $u(M)$ в точке M 7.2

$\text{div } \mathbf{a}(M)$ — дивергенция векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M 7.4

$\text{rot } \mathbf{a}(M)$ — ротор векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M 7.4

∇ — оператор Гамильтона 8.1

∇^2 — оператор Лапласа 8.3

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	капша	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о площади *криволинейной трапеции* привела нас к понятию определенного интеграла [VI]. Рассмотрим задачи, которые приводят к понятию *двойного интеграла*.

Задача об объеме цилиндрического тела. Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим тело Q , ограниченное снизу ограниченной замкнутой областью D на координатной плоскости xOy , сбоку *цилиндрической поверхностью* с образующими, параллельными оси Oz , и сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, причем функция $f(x, y)$ неотрицательна при $(x, y) \in D$ (рис. 1.1). Тело Q описанного вида обычно называют *z -цилиндрическим*.

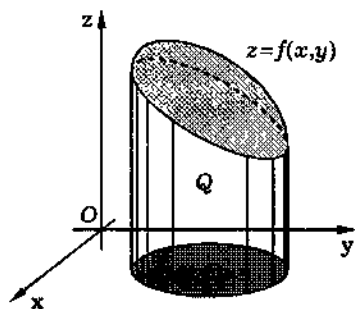


Рис. 1.1

Объем V рассматриваемого тела Q естественно искать следующим путем. Разобьем основание D произвольными кривыми на n *частичных областей* D_i , не имеющих общих внутрен-

них точек. Тогда все тело Q можно представить состоящим из n цилиндрических столбиков Q_i , $i = \overline{1, n}$, основаниями которых являются частичные области D_i . В каждой частичной области выберем некоторую точку $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$. Если приближенно принять каждый цилиндрический столбик за прямой цилиндр высотой, равной $f(\xi_i, \eta_i)$, то объем ΔV_i отдельного столбика Q_i будет приближенно равен произведению $f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь частичной области D_i . В таком случае объем тела Q приближенно можно представить в виде суммы:

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.1)$$

Для повышения точности этого соотношения следует, очевидно, уменьшать размеры частичных областей D_i , увеличивая их количество. За точное значение объема V целесообразно принять предел суммы в (1.1) при стремлении наибольшего диаметра d среди диаметров множеств D_i , $i = \overline{1, n}$, к нулю, т.е.

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.2)$$

Напомним, что диаметр множества — это точная верхняя грань расстояний между двумя произвольными точками этого множества.

Задача о массе пластины. Пусть на ограниченной замкнутой области D в координатной плоскости xOy распределена масса с поверхностной плотностью $\rho_S(x, y)$. Так можно представить, например, пластину из однородного материала с постоянной плотностью ρ_0 , но имеющую переменную толщину $h(x, y)$. Тогда поверхностная плотность пластины будет $\rho_S(x, y) = \rho_0 h(x, y)$.

Для вычисления массы m пластины разобьем D произвольным образом на n частичных областей D_i , $i = \overline{1, n}$, и в каждой

из них выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_i)$. Если приближенно принять, что масса по частичной области D_i распределена равномерно с поверхностной плотностью $\rho_S(\xi_i, \eta_i)$, то масса Δm_i этой частичной области будет приближенно равна произведению $\rho_S(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь D_i . В таком случае масса всей пластины приближенно равна

$$m \approx \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \sum_{i=1}^n \rho_S(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.3)$$

За точное значение массы m пластины можно принять предел суммы в приближенном равенстве (1.3) при стремлении к нулю наибольшего диаметра d всех частичных областей D_i , т.е.

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho_S(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.4)$$

В обеих рассмотренных задачах реализован один и тот же вычислительный процесс, который и приводит к понятию двойного интеграла. Оно является обобщением понятия определенного интеграла на случай действительных функций двух действительных переменных. Двойной интеграл играет важную роль при решении различных геометрических, физических и технических задач.

1.2. Определение двойного интеграла

Для определения *двойного интеграла* нам понадобится понятие *квадрируемой фигуры (квадрируемой замкнутой области)*. Напомним, что *плоскую фигуру* называют *квадрируемой*, если точная верхняя грань S_* множества площадей всех включенных в эту фигуру многоугольников равна точной нижней грани S^* множества площадей всех многоугольников, включающих в себя эту фигуру, причем число $S = S^* = S_*$ называют *площадью* данной *плоской фигуры*.

Для квадратуемости замкнутой области D необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие два многоугольника D_1 и D_2 с площадями S_1 и S_2 соответственно, что $D_1 \subset D \subset D_2$ и $S_2 - S_1 < \varepsilon$ [VI].

Всякое множество на плоскости (в частности, кривую) будем называть *множеством площади нуль*, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади. Введенное понятие позволяет сформулировать следующий критерий квадратуемости замкнутой области [VI].

Теорема 1.1. Для того чтобы замкнутая область была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь нуль. #

Опираясь на эту теорему, опишем некоторый класс квадратуемых областей, достаточно широкий для того, чтобы ограничиться им при дальнейшем рассмотрении.

Лемма 1.1. Всякая плоская спрямляемая кривая имеет площадь нуль.

◀ Пусть Γ — спрямляемая кривая с концевыми точками A и B (в случае замкнутой кривой эти точки совпадают), имеющая длину l . Разобьем кривую Γ при помощи точек $M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$ на n частей так, чтобы длина каждой из частей была равна l/n . Для каждой точки $M_i, i = \overline{1, n}$, построим квадрат P_i с центром в этой точке и стороной $a = 2l/n$ (рис. 1.2). Любая точка на дуге $M_{i-1}M_i$ кривой Γ удалена от точки M_i на расстояние не более чем l/n , поскольку l/n — длина этой дуги. Значит, все точки дуги $M_{i-1}M_i$ попадают в квадрат P_i , так как этот квадрат включает в себя круг с центром в точке M_i

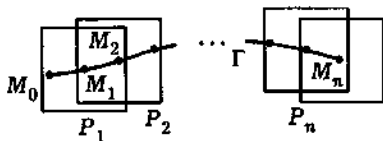


Рис. 1.2

радиуса $a/2 = l/n$. Объединение $\bigcup_{i=1}^n P_i$ всех квадратов P_i представляет собой многоугольную фигуру, целиком содержащую кривую Γ . При этом площадь фигуры не превосходит суммы площадей составляющих ее квадратов, равной

$$S = \left(\frac{2l}{n}\right)^2 n = \frac{4l^2}{n}.$$

Так как количество n дуг, на которые разделена кривая Γ , может быть сколь угодно большим, заключаем, что кривую Γ можно целиком включить в плоскую фигуру сколь угодно малой площади. Поэтому площадь кривой Γ равна нулю. ►

Из доказанной леммы и теоремы 1.1 следует, что всякая плоская замкнутая область, ограниченная одной или несколькими спрямляемыми кривыми, квадратуема. В частности, если замкнутая область ограничена, а ее граница состоит из конечного числа кривых, которые в заданной системе координат Oxy описываются уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций, то эта область квадратуема.

Отметим без доказательства основные свойства площади.

1. **Неотрицательность площади.** Площадь S любой квадратуемой замкнутой области D неотрицательна, т.е. $S \geq 0$;

2. **Монотонность площади.** Если D_1 и D_2 — две квадратуемые замкнутые области (рис. 1.3, а) с площадями S_1 и S_2 соответственно и $D_1 \subset D_2$, то $S_1 \leq S_2$.

3. **Аддитивность площади.** Пусть D_1 и D_2 — две квадратуемые замкнутые области без общих внутренних точек (рис. 1.3, б) с площадями S_1 и S_2 соответственно. Тогда их объединение $D = D_1 \cup D_2$ квадратуемо и имеет площадь $S = S_1 + S_2$.

4. **Инвариантность площади.** Если замкнутые области D_1 и D_2 конгруэнтны (рис. 1.3, в), т.е. могут быть полностью совмещены движением в плоскости, то их площади равны.

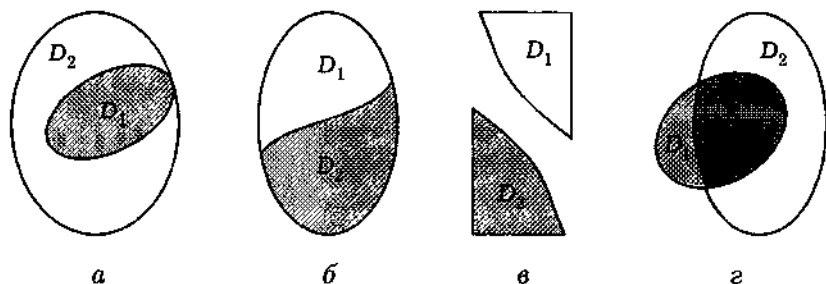


Рис. 1.3

5. Общая часть $D = D_1 \cap D_2$ двух квадратуемых замкнутых областей D_1 и D_2 (рис. 1.3, г) является квадратуемой.

В дальнейшем мы будем рассматривать только квадратуемые замкнутые области, которые, как правило, будем обозначать символом D . Условие квадратуемости предполагает, что рассматриваемая замкнутая область ограничена, так как площадь определена только для ограниченных областей.

Разбиением T квадратуемой замкнутой области D называют конечное множество $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ квадратуемых замкнутых областей D_i (**частичных областей разбиения**), которые обладают следующими свойствами:

- 1) никакие две частичные области не имеют общих внутренних точек, т.е. $\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset$, $i \neq j$;
- 2) объединение частичных областей составляет замкнутую область D , т.е. $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Наибольший из диаметров частичных областей разбиения T называют **диаметром** $d(T)$ этого разбиения. Таким образом, если $T = \{D_1, \dots, D_n\}$, то

$$d(T) = \max_{i=1, n} d_i,$$

где d_i — диаметр частичной области D_i .

В силу свойства аддитивности площадь S квадратуемой замкнутой области D равна сумме площадей ΔS_i частичных областей любого разбиения D , т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

Пусть в некоторой квадратуемой замкнутой области D на плоскости xOy определена ограниченная действительная функция $f(x, y)$. Выберем некоторое разбиение $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D и составим сумму

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad (1.5)$$

где $(\xi_i; \eta_i)$ — выбранная произвольным образом точка в частичной области D_i , а ΔS_i — площадь D_i . Сумму $S(T)$ вида (1.5) назовем интегральной суммой функции $f(x, y)$ в замкнутой области D . Эта сумма определена разбиением T и выбором точек $(\xi_i; \eta_i)$.

Функцию $f(x, y)$ называют *интегрируемой функцией* в D , если существует конечный предел I ее интегральных сумм $S(T)$, не зависящий от выбора разбиения и точек $(\xi_i; \eta_i)$ в частичных областях, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D с диаметром $d(T) < \delta(\varepsilon)$ и любого выбора точек $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$ для соответствующей интегральной суммы $S(T)$ выполняется неравенство $|S(T) - I| < \varepsilon$. При этом конечный предел I интегральных сумм называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по замкнутой области D и обозначают

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_D f(x, y) dS,$$

а D называют *областью интегрирования*.

Итак, можно записать

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.6)$$

Задачи, рассмотренные выше (см. 1.1), позволяют придать двойному интегралу геометрическую или физическую интерпретацию. Интегрируемая в замкнутой области D функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$, определяет в пространстве z -цилиндрическое тело, ограниченное снизу областью интегрирования D , сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , и сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (см. рис. 1.1). Двойной интеграл определяет объем этого тела.

Интегрируемую в D функцию $f(x, y)$, не принимающую отрицательных значений, можно трактовать как поверхностную плотность распределения массы пластины D . В этом случае двойной интеграл выражает массу этой пластины.

Следующую теорему можно рассматривать как необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема 1.2. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в замкнутой области D , то она ограничена в D .

◀ Предположим противное: пусть функция $f(x, y)$ интегрируема, но не ограничена в D . Согласно определению интегрируемости, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения T замкнутой области D с диаметром разбиения $d(T) < \delta(\varepsilon)$ при любом выборе точек $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$ выполнено неравенство $|S(T) - I| < \varepsilon$, где I — значение двойного интеграла функции $f(x, y)$ по области интегрирования D .

Выберем одно из разбиений $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ с диаметром $d(T) < \delta(\varepsilon)$ и рассмотрим соответствующую этому разбиению интегральную сумму с некоторым набором точек $(\xi_j; \eta_j) \in D_j$.

Так как по предположению функция $f(x, y)$ не ограничена в замкнутой области D , то она не ограничена и по крайней мере в одной из частичных областей D_j . Площадь ΔS_j частичной области D_j положительна, поэтому за счет выбора точки $(\xi_j; \eta_j) \in D_j$ слагаемое $f(\xi_j, \eta_j)\Delta S_j$ можно сделать сколь угодно большим по абсолютной величине. Тогда и всю интегральную сумму $S(T)$ можно сделать по модулю сколь угодно большой, но это противоречит неравенству $|S(T) - I| < \varepsilon$. Полученное противоречие опровергает предположение о неограниченности функции f и доказывает утверждение теоремы. ►

Замечание 1.1. Ограниченность функции в замкнутой области является лишь необходимым условием ее интегрируемости в этой области, но не достаточным. Покажем это на примере. Рассмотрим двумерный аналог $\chi(x, y)$ функции Дирихле, определенный на квадрате

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

следующим образом: $\chi(x, y) = 1$, если x и y являются рациональными числами, и $\chi(x, y) = 0$ в противном случае. Для такой функции не существует предела интегральных сумм. Действительно, если для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ квадрата D выбирать в частичных областях D_i точки $(\xi_i; \eta_i)$ с рациональными значениями координат, то любая интегральная сумма примет вид

$$S(T) = \sum_{i=1}^n \chi(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta S_i = S_D,$$

где S_D — площадь квадрата D . Но тогда и при стремлении диаметра разбиения к нулю предельное значение таких интегральных сумм равно S_D . Если же в частичных областях D_i выбирать точки $(\xi_i; \eta_i)$ с иррациональными значениями координат, то любая интегральная сумма будет равна нулю, поэтому и предельное значение таких интегральных сумм равно нулю.

Это говорит о том, что множество всех интегральных сумм не имеет предела при стремлении диаметра разбиения к нулю, а функция $\chi(x, y)$ не является интегрируемой в квадрате D .

1.3. Условия существования двойного интеграла

Для того чтобы установить условия, при которых функция $f(x, y)$ интегрируема в квадратируемой замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^2$, введем (как и в случае действительной функции одного действительного переменного) нижнюю и верхнюю суммы Дарбу*. Если $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ — некоторое разбиение D на частичные области D_i с площадями ΔS_i , $i = \overline{1, n}$, а m_i и M_i — точные нижняя и верхняя грани функции $f(x, y)$ в D_i , то нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x, y)$, соответствующие разбиению T , определяются равенствами

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i \quad \text{и} \quad \overline{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i. \quad (1.7)$$

Определение 1.1. Назовем разбиение T' в D *измельчением разбиения* T в D , если каждая частичная область разбиения T является либо частичной областью разбиения T' , либо объединением нескольких частичных областей разбиения T' .

Для сумм Дарбу, как и в случае действительной функции одного действительного переменного, можно установить следующие свойства.

1. Для заданного разбиения T в D верхняя $\overline{S}(T)$ и нижняя $\underline{S}(T)$ суммы Дарбу являются соответственно точной верхней и точной нижней гранями множества интегральных сумм, отвечающих разбиению T и всевозможным совокупностям точек

*Ж.Г. Дарбу (1842–1917) — французский математик.

$(\xi_i; \eta_i)$, выбираемых в частичных областях, т.е.

$$\begin{cases} \underline{S}(T) = \inf_{(\xi_i; \eta_i) \in D_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \\ \bar{S}(T) = \sup_{(\xi_i; \eta_i) \in D_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \end{cases} \quad (1.8)$$

В частности, для любого разбиения T интегральная сумма $S(T)$ при любом выборе точек $(\xi_i; \eta_i)$ в частичных областях удовлетворяет неравенствам

$$\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \bar{S}(T). \quad (1.9)$$

2. Если разбиение T' в D является измельчением разбиения T , то суммы Дарбу двух разбиений связаны неравенствами

$$\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T') \leq \bar{S}(T') \leq \bar{S}(T), \quad (1.10)$$

т.е. при измельчении разбиения верхняя сумма Дарбу не возрастает, а нижняя не убывает.

3. Для любых двух разбиений T' и T'' в D верны неравенства

$$\underline{S}(T'') \leq \bar{S}(T'), \quad \underline{S}(T') \leq \bar{S}(T''), \quad (1.11)$$

т.е. для данной функции $f(x, y)$ любая верхняя сумма Дарбу не меньше любой нижней суммы Дарбу.

Из последнего свойства сумм Дарбу следует, что множество всех нижних сумм для данной функции ограничено сверху (например, любой верхней суммой), а множество всех верхних сумм ограничено снизу (например, любой нижней суммой). Поэтому множество всех верхних сумм Дарбу данной функции имеет точную нижнюю грань I^* , а множество всех нижних сумм Дарбу — точную верхнюю грань I_* . Обозначив через

\mathcal{T} множество всех разбиений в D , можем записать

$$I_* = \sup_{T \in \mathcal{T}} \underline{S}(T), \quad I^* = \inf_{T \in \mathcal{T}} \overline{S}(T). \quad (1.12)$$

Отметим, что для любого разбиения T

$$\underline{S}(T) \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S}(T).$$

Как и в случае действительной функции одного действительного переменного, числа I_* и I^* называют соответственно *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* от функции $f(x, y)$ в D .

Рассмотренные свойства сумм Дарбу позволяют установить необходимые и достаточные условия интегрируемости функции $f(x, y)$ в замкнутой области D , аналогичные условиям существования определенного интеграла, т.е. справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.3. Для того чтобы ограниченная в квадратуемой замкнутой области D функция $f(x, y)$ была интегрируема в D , необходимо и достаточно, чтобы в D совпадали ее нижний I_* и верхний I^* интегралы Дарбу, т.е.

$$I_* = I^*. \quad (1.13)$$

Следствие 1.1. Для того чтобы ограниченная в квадратуемой замкнутой области D функция $f(x, y)$ была интегрируема в D , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i = 0, \quad (1.14)$$

где $\omega_i = M_i - m_i$, $i = \overline{1, n}$, — колебания функции $f(x, y)$ в частичных областях D_i разбиения T , а ΔS_i — площади частичных областей.

Теорема 1.4 (критерий существования двойного интеграла). Для того чтобы ограниченная в квадратуемой замкнутой области D функция $f(x, y)$ была интегрируема в D ,

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T в D , что

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Следствие 1.2. Для того чтобы ограниченная в квадратуемой замкнутой области D функция $f(x, y)$ была интегрируема в D , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T в D , что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i < \varepsilon. \quad (1.16)$$

1.4. Классы интегрируемых функций

При помощи сформулированных выше условий существования двойного интеграла (см. 1.3) можно выделить некоторые классы *интегрируемых функций*, имеющие важное значение в прикладных задачах.

Теорема 1.5. Всякая непрерывная в *квадратуемой замкнутой области* $D \subset \mathbb{R}^2$ функция $f(x, y)$ интегрируема в D .

◀ Поскольку замкнутая ограниченная область D является *компактом*, а функция $f(x, y)$ непрерывна в D , то она ограничена и равномерно непрерывна в D [1-5.9]. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ с диаметром $d(T) < \delta(\varepsilon)$ колебание ω_i функции $f(x, y)$ в каждой частичной области D_i удовлетворяет неравенству $\omega_i < \varepsilon/S$, $i = \overline{1, n}$, где S — площадь D . Для каждого такого разбиения имеем

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \varepsilon,$$

где ΔS_i — площадь частичной области D_i . Согласно следствию 1.2, функция $f(x, y)$ интегрируема в D . ▶

Приведем без доказательства две теоремы, имеющие важное значение при решении задач.

Теорема 1.6. Если функция $f(x, y)$ ограничена в квадратуемой замкнутой области D и непрерывна в D всюду, кроме точек некоторого множества площади нуль, то эта функция интегрируема в D .

Теорема 1.7. Если ограниченные в квадратуемой замкнутой области D функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ отличаются друг от друга только на некотором множестве площади нуль, то интегрируемость в D одной из них равносильна интегрируемости другой, причем

$$\int_D f(x, y) dS = \int_D g(x, y) dS. \quad \#$$

Последняя теорема утверждает, что существование и значение двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией на множестве площади нуль. Таким множеством может быть, например, конечное множество спрямляемых кривых. Поскольку граница квадратуемой замкнутой области имеет площадь нуль (см. теорему 1.1), то существование и значение интеграла не зависят от значений функции на границе области интегрирования.

Интегрируемые функции двух переменных, как и интегрируемые функции одного переменного, обладают следующими свойствами.

1. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D , то их произведение $f(x, y)g(x, y)$ также интегрируемо в D .

2. Если функция $g(x, y)$ интегрируема в D и удовлетворяет в D неравенству $|g(x, y)| \geq c > 0$, то функция $1/g(x, y)$ также интегрируема в D .

3. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D и $|g(x, y)| \geq c > 0$ в D , то функция $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ интегрируема в D .

1.5. Свойства двойного интеграла

Основные свойства *двойного интеграла* аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Через D обозначим плоскую *квадрируемую замкнутую область*.

1°. Если D имеет площадь S , то существует двойной интеграл

$$\iint_D dx dy = S.$$

◀ Действительно, в данном случае подынтегральная функция постоянна в D : $f(x, y) \equiv 1$. Поэтому при любом разбиении $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D на частичные области D_i с площадями ΔS_i и произвольном выборе точек $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$ в силу определения двойного интеграла имеем

$$\iint_D dx dy = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta S_i = S,$$

где $d(T)$ — диаметр разбиения T . ▶

2°. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D , то их линейная комбинация $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, также интегрируема в D , причем

$$\begin{aligned} \int_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dS &= \\ &= \alpha \int_D f(x, y) dS + \beta \int_D g(x, y) dS. \end{aligned} \quad (1.17)$$

◀ Если T — произвольное разбиение замкнутой области D на частичные области D_i , $i = \overline{1, n}$, с площадями ΔS_i при произвольном выборе точек $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$, то интегральная сумма для

рассматриваемой линейной комбинации функций имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)) \Delta S_i &= \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \end{aligned}$$

В силу интегрируемости функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ в D интегральные суммы в правой части этого равенства имеют конечные пределы при стремлении к нулю диаметра $d(T)$ разбиения T . Но тогда существует конечный предел при $d(T) \rightarrow 0$ и левой части этого равенства, что означает интегрируемость рассматриваемой линейной комбинации функций. Переходя в обеих частях этого равенства к пределу при $d(T) \rightarrow 0$, приходим к (1.17). ►

Свойство 2° называют *линейностью двойного интеграла*. Ясно, что это свойство справедливо для любого конечного числа интегрируемых функций в линейной комбинации.

3°. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D , то она интегрируема и в любой квадратируемой замкнутой подобласти $D' \subset D$, а также в замкнутой области $D'' = \overline{D \setminus D'}$, причем

$$\int_D f(x, y) dS = \int_{D'} f(x, y) dS + \int_{D''} f(x, y) dS. \quad (1.18)$$

◀ Рассмотрим произвольные разбиения T' и T'' замкнутых областей D' и D'' . Частичные области разбиения T' обозначим через D_1, D_2, \dots, D_k , а частичные области разбиения T'' — через $D_{k+1}, D_{k+2}, \dots, D_n$, $k < n$. Объединяя разбиения T' и T'' , получим разбиение $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D . При этом диаметры $d(T')$, $d(T'')$ и $d(T)$ трех разбиений связаны соотношением $d(T) = \max\{d(T''), d(T')\}$.

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема в D , то, согласно следствию 1.1, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D , имеющего диаметр $d(T) < \delta$, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i < \varepsilon, \quad (1.19)$$

где ω_i — колебание функции в частичной области D_i , а ΔS_i — площадь D_i . Выберем в D' и D'' произвольные разбиения T' и T'' с диаметрами меньше δ и построим, как описано выше, объединенное разбиение T . Тогда $d(T) < \delta$, и поэтому для данного разбиения верно неравенство (1.19). Но так как

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \Delta S_i + \sum_{i=k+1}^n \omega_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i,$$

а две суммы в левой части равенства неотрицательны, то каждая из них будет меньше ε . Согласно следствию 1.2, функция $f(x, y)$ интегрируема в D' и D'' . Тем самым доказана первая часть утверждения.

Выберем произвольные разбиения $T' = \{D_1, \dots, D_k\}$ и $T'' = \{D_{k+1}, \dots, D_n\}$ замкнутых областей D' и D'' . Тогда интегральную сумму функции $f(x, y)$, соответствующую разбиению $T = T' \cup T''$, можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.20)$$

Мы видим, что интегральная сумма $S(T)$ распадается на две интегральные суммы $S(T')$ и $S(T'')$. Если диаметры разбиений T' и T'' стремятся к нулю, то и диаметр разбиения T стремится к нулю. При этом интегральные суммы в равенстве (1.20) стремятся к соответствующим двойным интегралам, и мы приходим к равенству (1.18). ►

Свойство 3° называют *аддитивностью двойного интеграла*. Из него, в частности, следует, что если область интегрирования D разделена на конечное число квадратуемых замкнутых подобластей D_1, \dots, D_k , не имеющих общих внутренних точек, то из интегрируемости функции в D вытекает ее интегрируемость в каждой частичной области D_j . При этом двойной интеграл по замкнутой области D равен сумме двойных интегралов по всем частичным областям D_j .

Замечание 1.2. Свойство интегрируемости функции сохраняется не только при переходе от области интегрирования к ее подобласти, но и при объединении областей интегрирования. Другими словами, если функция $f(x, y)$ интегрируема в замкнутых областях D_1 и D_2 , то она интегрируема и в их объединении $D = D_1 \cup D_2$. В самом деле, пересечение $D_1 \cap D_2$ является квадратуемой замкнутой областью. Поэтому, согласно свойству 3°, функция $f(x, y)$, интегрируемая в D_1 , интегрируема и в замкнутой области $\overline{D_1} \setminus D_2$. Мы можем считать, что замкнутые области D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, так как иначе в представлении $D = D_1 \cup D_2$ мы можем D_1 заменить на $\overline{D_1} \setminus D_2$. Но если D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, то разбиение замкнутой области $D = D_1 \cup D_2$ можно строить так же, как и в доказательстве свойства 3°, т.е. объединением разбиений замкнутых областей D_1 и D_2 . Используя следствия 1.1 и 1.2, нетрудно показать, что из интегрируемости в D_1 и D_2 следует интегрируемость в D . #

4°. Если функция $f(x, y)$ неотрицательна и интегрируема в D , то

$$\int_D f(x, y) dS \geq 0. \quad (1.21)$$

◀ Так как функция $f(x, y)$ неотрицательна в D , то для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D на частичные области D_i с площадями ΔS_i при любом выборе точек

$(\xi_i; \eta_i) \in D_i$ имеем

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \geq 0, \quad (1.22)$$

т.е. любая интегральная сумма рассматриваемой функции неотрицательна. Поэтому предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, который существует в силу интегрируемости функции, неотрицателен. А это и означает, что двойной интеграл функции $f(x, y)$ по области интегрирования D имеет неотрицательное значение, т.е. верно равенство (1.21). ►

5°. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D и $f(x, y) \geq g(x, y)$, $(x; y) \in D$, то

$$\int_D f(x, y) dS \geq \int_D g(x, y) dS. \quad (1.23)$$

◀ В силу линейности двойного интеграла функция $f(x, y) - g(x, y)$ интегрируема в D . Так как $f(x, y) - g(x, y) \geq 0$, $(x; y) \in D$, то, согласно свойству 4° двойного интеграла,

$$\int_D (f(x, y) - g(x, y)) dS \geq 0.$$

Отсюда, используя свойство 2°, получаем (1.23). ►

Замечание 1.3. Как и в случае определенного интеграла, свойства 4° и 5° можно уточнить следующим образом. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D , удовлетворяет неравенству $f(x, y) \geq 0$, $(x; y) \in D$, причем это неравенство строгое хотя бы в одной точке $(x_0; y_0)$, в которой функция $f(x, y)$ непрерывна, то

$$\int_D f(x, y) dS > 0.$$

Аналогично, если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D и связаны неравенством $f(x, y) \geq g(x, y)$, $(x, y) \in D$, причем это неравенство строгое хотя бы в одной точке $(x_0, y_0) \in D$, в которой функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ непрерывны, то

$$\int_D f(x, y) dS > \int_D g(x, y) dS. \quad \#$$

6°. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D , то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема в D , причем

$$\left| \int_D f(x, y) dS \right| \leq \int_D |f(x, y)| dS. \quad (1.24)$$

◀ Согласно следствию 1.2, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D , что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i < \varepsilon,$$

где ω_i — колебание функции $f(x, y)$ в частичной области D_i , а ΔS_i — площадь частичной области D_i . В силу неравенства [I-1.3]

$$\left| |f(x', y')| - |f(x'', y'')| \right| \leq |f(x', y') - f(x'', y'')|,$$

верного для любых точек (x', y') и (x'', y'') в D , для колебаний ω'_i функции $|f(x, y)|$ в частичных областях D_i верны неравенства $\omega'_i \leq \omega_i$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i < \varepsilon.$$

Согласно следствию 1.2, это означает интегрируемость функции $|f(x, y)|$ в D . Так как

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|, \quad (x, y) \in D,$$

то, используя свойство 5°, получаем

$$-\int_D |f(x,y)| dS \leq \int_D f(x,y) dS \leq \int_D |f(x,y)| dS,$$

что равносильно неравенству (1.24). ►

Отметим, что из интегрируемости функции $|f(x,y)|$ в D не следует интегрируемость в D функции $f(x,y)$. Например, функция $\chi(x,y)$, рассмотренная в замечании 1.1, не является интегрируемой в квадрате D , заданном условиями $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. То же относится и к функции $f(x,y) = 2\chi(x,y) - 1$. Но $|f(x,y)| \equiv 1$ в D , так что функция $|f(x,y)|$ интегрируема в D .

Свойство 6° называют *теоремой об оценке двойного интеграла по модулю*.

7°. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в D и удовлетворяют в D неравенствам $m \leq f(x,y) \leq M$ и $g(x,y) \geq 0$. Тогда

$$m \int_D g(x,y) dS \leq \int_D f(x,y)g(x,y) dS \leq M \int_D g(x,y) dS. \quad (1.25)$$

◀ По условию $m \leq f(x,y) \leq M$, $(x,y) \in D$. Умножив эти неравенства на неотрицательное значение $g(x,y)$, получим

$$mg(x,y) \leq f(x,y)g(x,y) \leq Mg(x,y).$$

В силу свойства 5° и линейности двойного интеграла приходим к неравенствам (1.25). ►

Свойство 7° иногда называют *теоремой об оценке двойного интеграла*.

Если в формулировке свойства 7° неравенство $g(x,y) \geq 0$ заменить противоположным неравенством $g(x,y) \leq 0$, то вместо

неравенств (1.25) получаем

$$M \int_D g(x, y) dS \leq \int_D f(x, y) g(x, y) dS \leq m \int_D g(x, y) dS.$$

Если в свойстве 7° положить $g(x, y) \equiv 1$, то двойное неравенство (1.25) примет вид

$$mS \leq \int_D f(x, y) dS \leq MS, \quad (1.26)$$

где S — площадь замкнутой области D .

1.6. Теоремы о среднем значении для двойного интеграла

Как и свойства двойного интеграла (см. 1.5), теоремы о среднем значении для него аналогичны соответствующим теоремам для определенного интеграла [VI].

Теорема 1.8 (теорема о среднем значении для двойного интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадратурной замкнутой области D , являющейся линейно связным множеством, то в D существует такая точка $(x_0; y_0)$, что

$$\int_D f(x, y) dS = f(x_0, y_0) S, \quad (1.27)$$

где S — площадь области интегрирования D .

◀ Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой квадратурной области D , то, согласно теореме 1.3, она является интегрируемой функцией в D . Поскольку D — компакт, то

непрерывная в D функция $f(x, y)$ достигает на этом множестве наименьшего m и наибольшего M значений [V]. Используя неравенства $m \leq f(x, y) \leq M$, $(x; y) \in D$, и (1.26), получаем

$$m \leq \frac{1}{S} \int_D f(x, y) dS \leq M.$$

Обозначим среднюю часть этого неравенства через μ . Так как $\mu \in [m, M]$, то опять-таки в силу непрерывности $f(x, y)$ на компакте D , являющемся линейно связным, найдется хотя бы одна такая точка $(x_0; y_0) \in D$, что $f(x_0, y_0) = \mu$. А это равносильно равенству (1.27). ►

Теореме 1.8 можно дать геометрическую интерпретацию, так же как и аналогичной теореме для определенного интеграла [VI]. Выше установлено (см. 1.2), что двойной интеграл от неотрицательной функции $f(x, y)$ по области интегрирования D равен объему z -цилиндрического тела, ограниченного снизу замкнутой областью D в координатной плоскости xOy , боковой цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , и сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (см. рис. 1.1). Из равенства (1.27) следует, что этот объем равен объему прямого цилиндра с тем же основанием и высотой, совпадающей со значением $f(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$, в точке $(x_0; y_0) \in D$. Значение $f(x_0, y_0)$, фигурирующее в (1.27), называют *средним значением* этой функции в плоской замкнутой области D .

Пример 1.1. Найдем среднее значение функции $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ в замкнутом круге

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

и точку $(x_0; y_0) \in D$, в которой достигается это значение. Графиком функции $z = f(x, y)$ в D является полусфера радиуса R с центром в начале прямоугольной декартовой системы

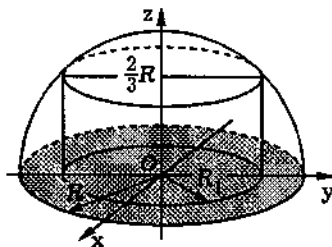


Рис. 1.4

координат $Oxyz$ (рис. 1.4). Поэтому двойной интеграл

$$I = \int_D f(x, y) dS = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

равен объему V полушара радиуса R , т.е. $I = 2\pi R^3/3$, а площадь S области интегрирования D равна площади круга того же радиуса, т.е. $S = \pi R^2$. Согласно равенству (1.27), среднее значение μ подынтегральной функции в D равно $\mu = V/S = 2R/3$. Точки $(x_0; y_0)$, в которых функция $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ принимает среднее значение $\mu = 2R/3$, находим, решая уравнение

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{2R}{3}.$$

Возведя уравнение в квадрат, получим $x^2 + y^2 = 5R^2/9$. Отсюда заключаем, что множество точек $(x_0; y_0) \in D$, в которых достигается среднее значение μ функции $f(x, y)$ в D , представляет собой окружность в плоскости xOy радиуса $R_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}R$ с центром в начале координат (см. рис. 1.4). #

Перейдем к обобщению теоремы 1.8.

Теорема 1.9. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадратурной замкнутой области D , являющейся линейно связным множеством, а функция $g(x, y)$ интегрируема и знакопостоянна

в D , то найдется хотя бы одна точка $(x_0; y_0) \in D$, для которой справедливо равенство

$$\int_D f(x, y)g(x, y) dS = f(x_0, y_0) \int_D g(x, y) dS. \quad (1.28)$$

◀ Предположим, что $g(x, y)$ неотрицательна в D . Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D , т.е. на компакте, она достигает в D своих наименьшего m и наибольшего M значений. При этом $m \leq f(x, y) \leq M$, $(x; y) \in D$. В силу свойства 7° двойного интеграла (см. 1.5) можно написать

$$m \int_D g(x, y) dS \leq \int_D f(x, y)g(x, y) dS \leq M \int_D g(x, y) dS. \quad (1.29)$$

В соответствии со свойством 4° (см. 1.5) двойной интеграл от неотрицательной функции неотрицателен, т.е.

$$I = \int_D g(x, y) dS \geq 0.$$

Если $I = 0$, то и средний интеграл в (1.29) равен нулю, так что (1.28) верно для любой точки $(x; y) \in D$. Если же $I > 0$, то, разделив (1.29) на I , получим

$$m \leq \frac{1}{I} \int_D f(x, y)g(x, y) dS \leq M.$$

Обозначим среднюю часть этого неравенства через μ . Так как $\mu \in [m, M]$, в силу непрерывности функции $f(x, y)$ на линейно связном компакте D найдется хотя бы одна точка $(x_0; y_0) \in D$, в которой $f(x_0, y_0) = \mu$ [V], а это равносильно (1.28).

Аналогичным образом равенство (1.28) доказывается в случае, когда $g(x, y) \leq 0$, $(x; y) \in D$. ▶

1.7. Вычисление двойного интеграла

Рассмотрим сначала простой случай, когда область интегрирования D в координатной плоскости xOy является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, т.е.

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}. \quad (1.30)$$

Ясно, что D — *квадрируемая замкнутая область* и ее площадь равна $S = (b - a)(d - c)$.

Теорема 1.10. Если существует *двойной интеграл* от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику D (1.30) и при каждом фиксированном значении $x \in [a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b], \quad (1.31)$$

то существует *повторный интеграл*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b I(x) dx, \quad (1.32)$$

причем двойной интеграл равен повторному, т.е.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1.33)$$

◀ Введем *разбиения*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m = d$$

отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно. Они определяют *разбиение* T замкнутой области D , состоящее из конечного числа

прямоугольников

$$D_{ij} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [x_{i-1}, x_i]\}, y \in [y_{j-1}, y_j]\},$$

$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m},$$

имеющих площади $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ (рис. 1.5).

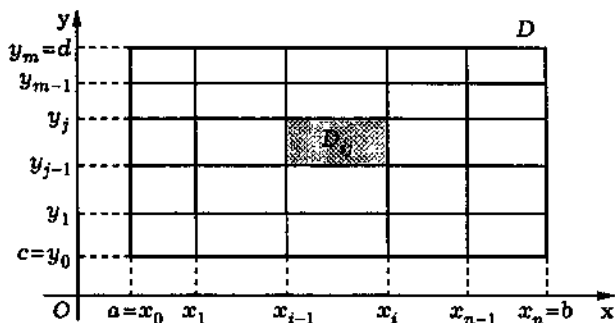


Рис. 1.5

Пусть m_{ij} и M_{ij} — точные нижняя и верхняя грани функции $f(x, y)$ в прямоугольнике D_{ij} , так что $m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$, $(x; y) \in D_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Выберем на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i и проинтегрируем функцию $f(\xi_i, y)$ одного переменного по y от y_{j-1} до y_j . Поскольку $m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$, то в силу свойств определенного интеграла имеем

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}. \quad (1.34)$$

Интеграл в (1.34) существует, так как при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл (1.31).

Суммируя неравенства (1.34) по j от 1 до m , получаем

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

Умножив все части каждого из этих неравенств на Δx_i и просуммировав по i от 1 до n , запишем

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j.$$

В средней части этого неравенства стоит интегральная сумма для функции $I(x)$, $x \in [a, b]$, соответствующая разбиению отрезка $[a, b]$, а слева и справа — нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x, y)$, соответствующие разбиению T прямоугольника D . Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta S_{ij} = \underline{S}(T), \\ \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta S_{ij} = \bar{S}(T). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\underline{S}(T) \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(T). \quad (1.35)$$

Так как существует двойной интеграл функции $f(x, y)$ по области интегрирования D , то при $\Delta x_i \rightarrow 0$ и $\Delta y_j \rightarrow 0$ (следовательно, диаметр $d(T)$ разбиения T также стремится к нулю) обе суммы Дарбу $\underline{S}(T)$ и $\bar{S}(T)$ стремятся к общему пределу, равному значению двойного интеграла (см. теорему 1.3). При этом в силу двойного неравенства (1.35) к тому же пределу при $d(T) \rightarrow 0$ стремится и интегральная сумма $\sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i$ функции $I(x)$, соответствующая интегралу от этой функции по отрезку $[a, b]$. Это доказывает, что повторный интеграл в (1.32) слева существует и выполняется равенство (1.33). ►

Замечание 1.4. Меняя роли переменных x и y и предполагая при произвольном фиксированном y существование определенного интеграла

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

приходим к формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.36)$$

Если, наконец, наряду с двойным интегралом существуют оба интеграла $I(x)$ и $I_1(y)$, то справедливо равенство

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.37)$$

Таким образом, вычисление двойного интеграла сведено к двум последовательным вычислениям определенных интегралов сначала по одному из переменных интегрирования, а затем по другому.

Пример 1.2. Вычислим двойной интеграл от функции $f(x, y) = 1/(x + y)^3$ по замкнутой области

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [2, 3], y \in [1, 2]\}.$$

На основании (1.33) представим двойной интеграл как повторный:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x + y)^3} = \int_2^3 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x + y)^3}.$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^3} = -\frac{1/2}{(x+y)^2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right).$$

Затем следует вычисление внешнего интеграла. В результате

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3} &= \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Для вычисления двойного интеграла от функции $f(x, y) = x/(1+x^2+y^2)^{3/2}$ по области интегрирования

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 2], y \in [1, 2]\}$$

целесообразно применить формулу (1.36):

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} &= \int_1^2 dy \int_0^2 \frac{x dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \\ &= -\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_0^2 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+y^2}} \right) dy = \\ &= \ln \left| \frac{y + \sqrt{1+y^2}}{y + \sqrt{5+y^2}} \right| \Big|_1^2 = \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{5} - \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{6}} = \\ &= \ln \frac{(2 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{6})}{5(1 + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Замечание 1.5. Рассмотрим двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику D (1.30). Предположим, что у

подынтегральной функции переменные разделяются, т.е. она имеет вид

$$f(x, y) = h(x)g(y), \quad (x; y) \in D.$$

Тогда при сведении двойного интеграла к повторному мы фактически приходим к произведению двух определенных интегралов:

$$\begin{aligned} \iint_D h(x)g(y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d h(x)g(y) dy = \\ &= \int_a^b \left(h(x) \int_c^d g(y) dy \right) dx = \left(\int_a^b h(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right). \end{aligned}$$

Этот эффект вызван тем обстоятельством, что в повторном интеграле внутренний определенный интеграл не зависит от переменного интегрирования из внешнего интеграла и, как числовой множитель, может быть вынесен за пределы внешнего интеграла.

Пример 1.4. Для двойного интеграла от функции $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}$ по прямоугольнику

$$D = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [1, 3], y \in [0, \sqrt{2}/2] \right\}$$

имеем

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}} dx dy &= \int_1^3 x^2 dx \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 \cdot \arcsin y \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{26}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{13}{6} \pi. \quad \# \end{aligned}$$

Перейдем теперь к более сложному случаю сведения двойного интеграла к повторному, когда граница области интегрирования вся или частично является криволинейной.

Определение 1.2. Область интегрирования D называют **правильной** в направлении координатной оси Oy , если ее можно задать в виде

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}, \quad (1.38)$$

где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют неравенству $y_1(x) \leq y_2(x)$, $x \in [a, b]$. Аналогично вводится понятие области, правильной в направлении координатной оси Ox .

Область интегрирования D может быть правильной в направлении одной координатной оси и не быть правильной в направлении другой координатной оси. Например, замкнутая область на рис. 1.6, *a* правильная в направлении любой из координатных осей, в то время как замкнутая область на рис. 1.6, *б* является правильной лишь в направлении оси Oy .

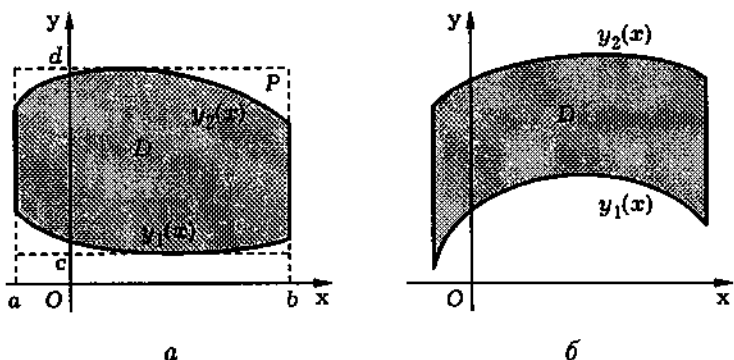


Рис. 1.6

Представление (1.38) носит скорее геометрический, чем алгебраический характер, поскольку функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, участвующие в этом представлении, следует рассматривать с

самой общей точки зрения, т.е. как отображение, а не как выражение, содержащее переменное x . Например, область D на рис. 1.6, а является, как уже сказано, правильной в направлении оси Ox , но функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$, с помощью которых область можно задать в виде

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

скорее всего являются составными и на разных участках отрезка $[c, d]$ задаются разными выражениями. Способ задания функции вообще не является определяющим: одну и ту же функцию можно задавать разными способами (сравните функции $y = x$ и $y = \sin(\arcsin x)$ на отрезке $[0, 1]$).

Отметим, что область интегрирования D , правильная, например, в направлении координатной оси Oy , является квадрируемой, поскольку ее граница есть множество площади нуль (см. теорему 1.1).

Теорема 1.11. Если существует двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области интегрирования D вида (1.38) и при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

то существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b I(x) dx,$$

причем верно равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.39)$$

◀ Заклучим область интегрирования D в прямоугольник

$$P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

где c — наименьшее значение функции $y_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, а d — наибольшее значение функции $y_2(x)$ на этом отрезке (см. рис. 1.6, а). Рассмотрим в прямоугольнике P функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x \in D; \\ 0, & x \in P \setminus D. \end{cases}$$

Эта функция интегрируема в D , так как совпадает в D с интегрируемой функцией $f(x, y)$, причем

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Кроме того, функция $F(x, y)$ интегрируема и в замкнутой области $D' = \overline{P \setminus D}$, так как эта замкнутая область квадратуема, а $F(x, y) \equiv 0$ в $P \setminus D$. В частности,

$$\iint_{D'} F(x, y) dx dy = 0.$$

Поэтому, согласно замечанию 1.2, функция $F(x, y)$ интегрируема во всем прямоугольнике P , причем в силу аддитивности двойного интеграла

$$\iint_P F(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.40)$$

При каждом фиксированном значении $x \in [a, b]$ существует определенный интеграл функции $F(x, y)$ по отрезку $[c, d]$, причем

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^{y_1(x)} F(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x, y) dy.$$

Действительно, на отрезках $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ функция $F(x, y)$ (при заданном фиксированном y) тождественно равна нулю и, значит, интегрируема, а интеграл

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

существует по условию теоремы. В силу *аддитивности определенного интеграла* заключаем, что функция $F(x, y)$ интегрируема на $[c, d]$. Кроме того,

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.41)$$

Из сказанного следует, что функция $F(x, y)$ в прямоугольнике P удовлетворяет условиям теоремы 1.10. Поэтому двойной интеграл от этой функции по прямоугольнику P равен повторному:

$$\iint_P F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Отсюда, используя (1.40) и (1.41), получаем (1.39). ►

Замечание 1.6. Пусть замкнутая область D является правильной в направлении оси Ox и задана неравенствами $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, где функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$. Предположим, что существует двойной интеграл от функции $f(x, y)$ с областью интегрирования D , а при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ существует определенный интеграл

$$I_1(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.42)$$

Это утверждение сводится к утверждению теоремы 1.11 простым переобозначением переменных. #

Дадим теперь геометрическую трактовку формул, сводящих двойной интеграл к повторному. Напомним, что *объем V кубированного тела*, ограниченного в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ плоскостями $x = a$ и $x = b$ ($a \leq b$), можно найти по формуле [VI]

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (1.43)$$

где $S(x)$ — площадь сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку с абсциссой $x \in [a, b]$. Применим (1.43) для вычисления объема *z -цилиндрического тела Q* , имеющего основанием замкнутую область D , лежащую в плоскости xOy , а сверху ограниченного поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — неотрицательная функция, непрерывная в D . Пусть D ограничена линиями, заданными уравнениями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ ($y_1(x) \leq y_2(x)$), $x \in [a, b]$ (рис. 1.7).

Сечение тела Q плоскостью $x = x_0 \in [a, b]$ представляет собой криволинейную трапецию $ABCE$. Ее ортогональной проекцией на плоскость yOz будет трапеция $A'B'C'E'$, площадь которой равна площади $S(x_0)$ трапеции $ABCE$. Трапеция $A'B'C'E'$ ограничена отрезками прямых $y = y_1(x_0)$ и $y = y_2(x_0)$, осью Oy и линией, заданной уравнением $z = f(x_0, y)$, $y \in [y_1(x_0), y_2(x_0)]$. Поэтому в соответствии с геометрическим смыслом определен-

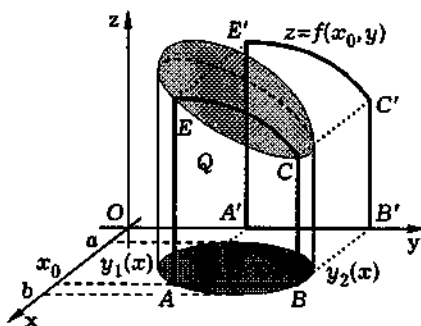


Рис. 1.7

ного интеграла [VI]

$$S(x_0) = \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

Это равенство справедливо для произвольной точки $x \in [a, b]$. Поэтому после его подстановки в (1.43) получим

$$V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.44)$$

Сравнивая правые части (1.39) и (1.44), приходим к выводу, что геометрический смысл сведения при помощи (1.39) двойного интеграла к повторному состоит в том, что объем кубируемого тела, выражаемого двойным интегралом, можно представить определенным интегралом от функции, отражающей зависимость площади сечения тела от той из координат, которая определяет положение секущей плоскости. В свою очередь, эту площадь в повторном интеграле представляет внутренний определенный интеграл. Аналогично можно дать геометрическую интерпретацию сведения двойного интеграла к повторному при использовании (1.42).

Замечание 1.7. Для того чтобы при вычислении двойных интегралов применять теорему 1.11, необходимо область интегрирования D двойного интеграла представлять в виде (1.38). Проще всего это делать, исходя из геометрических соображений. Предположим, что замкнутая область D является правильной в направлении оси Oy . Тогда значения a и b в (1.39) представляют собой левый и правый концы отрезка, получающегося проектированием D на ось Ox . Так как замкнутая область D правильная в направлении оси Oy , для произвольного значения $x_0 \in [a, b]$ сечение D вертикальной прямой $x = x_0$ есть отрезок, причем нижний $y_1(x_0)$ и верхний $y_2(x_0)$ концы этого отрезка (также называемые точкой входа и точкой выхода) зависят от выбранного значения $x_0 \in [a, b]$ и тем самым задают на $[a, b]$ две функции $y_1(x)$ (функция входа) и $y_2(x)$ (функция выхода). Определенные описанным способом значения a, b и функции $y_1(x), y_2(x)$ приводят к представлению замкнутой области D в виде (1.38).

Пример 1.5. Вычислим двойной интеграл от функции $f(x, y) = x^2 y^3$ по области интегрирования

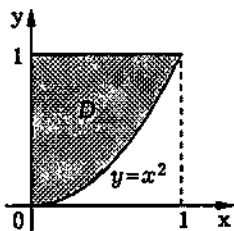


Рис. 1.8

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Область интегрирования D является правильной в направлении оси Oy , причем $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) \equiv 1$ (рис. 1.8). Используя формулу (1.39), находим

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y^3 dy = \int_0^1 \frac{1}{4} x^2 y^4 \Big|_{x^2}^1 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x^2 - x^{10}) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{11}}{11} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) = \frac{2}{33}. \end{aligned}$$

Замечание 1.8. Отметим, что в примере 1.5 область интегрирования правильная в направлении обеих координатных осей (см. рис. 1.8). Поэтому для вычисления двойного интеграла в этом примере можно было использовать формулу (1.42). В частности, область интегрирования можно представить в виде

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [0, 1], 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Используя (1.42), находим

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^2 y^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 y^3 \Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y^{9/2} dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} y^{11/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{33}. \end{aligned}$$

Замечание 1.9. Если двойной интеграл может быть сведен к повторному как при помощи (1.39), так и при помощи (1.42), то при решении конкретных задач следует выбирать более удобный путь. Например, при вычислении двойного интеграла от функции $f(x, y) = 2x + 3y$ по области интегрирования D , ограниченной осью Ox и линиями $x^2 + y^2 = 1$ и $x - y = 1$ (рис. 1.9), можно применить и (1.39), и (1.42), поскольку область интегрирования D является правильной в направлении обеих координатных осей. Но нижняя граница D состоит из двух участков (четверти окружности и отрезка прямой), опи-

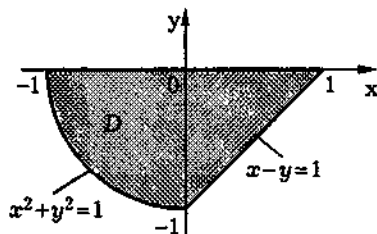


Рис. 1.9

сываемых разными уравнениями. Поэтому при использовании (1.39) приходится вычислять два повторных интеграла:

$$\iint_D (2x + 3y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 (2x + 3y) dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2x + 3y) dy.$$

В то же время применение формулы (1.42) позволяет ограничиться вычислением лишь одного повторного интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_D (2x + 3y) dx dy &= \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+y} (2x + 3y) dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 3yx) \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+y} dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(1 + 2y + y^2 + 3y + 3y^2 - 1 + y^2 + 3y\sqrt{1-y^2} \right) dy = \\ &= \left(\frac{5}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - (1-y^2)^{3/2} \right) \Big|_{-1}^0 = -1 + \frac{5}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Помимо особенностей области интегрирования D при представлении двойного интеграла повторным следует учитывать и сложность вычисления возникающего при этом внутреннего определенного интеграла. Так, в примере 1.3 даже в случае прямоугольной области интегрирования выбранный вариант представления двойного интеграла повторным позволил упростить вычисление внутреннего интеграла.

Замечание 1.10. Если область интегрирования D не является правильной ни в направлении оси Ox , ни в направлении оси Oy (рис. 1.10), то для сведения двойного интеграла к повторному область интегрирования D следует разбить на части так, чтобы каждая из них была правильной хотя бы в направлении

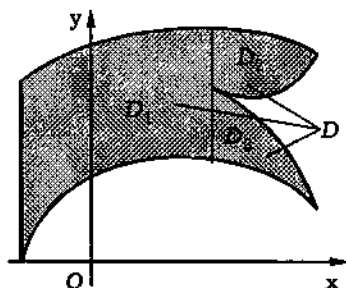


Рис. 1.10

одной из осей и позволяла применить (1.39) или (1.42). Тогда в силу аддитивности двойного интеграла он будет равен сумме двойных интегралов по каждой из частей. На рис. 1.10 представлен один из вариантов разбиения области интегрирования на три области, правильные в направлении оси Oy . Отметим, что выбор порядка переменных при преобразовании двойного интеграла в повторный может существенно повлиять на сложность вычислений.

Пример 1.6. Представим двойной интеграл от интегрируемой в D функции $f(x, y)$ повторным, если D ограничена осью Oy и полуокружностями, заданными уравнениями $x = \sqrt{2ay - y^2}$ и $x = \sqrt{4ay - y^2}$ (рис. 1.11, а). Для вычисления

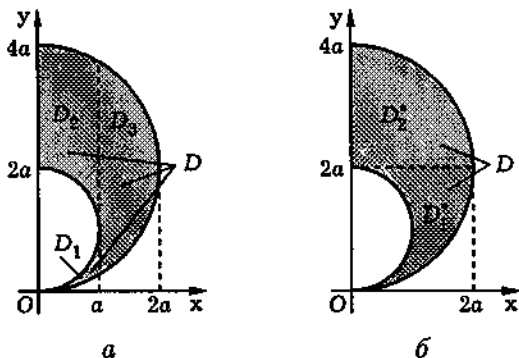


Рис. 1.11

двойного интеграла при помощи (1.39) область интегрирования D разобьем прямой $x = a$ на три части

$$D_1 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, a], 2a - \sqrt{4a^2 - x^2} \leq y \leq a - \sqrt{a^2 - x^2} \right\};$$

$$D_2 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, a], a + \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq 2a + \sqrt{4a^2 - x^2} \right\};$$

$$D_3 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, 2a], 2a - \sqrt{4a^2 - x^2} \leq y \leq 2a + \sqrt{4a^2 - x^2} \right\}.$$

Тогда исходный двойной интеграл будет представлен суммой трех повторных:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^a dx \int_{2a - \sqrt{4a^2 - x^2}}^{a - \sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^a dx \int_{a + \sqrt{a^2 - x^2}}^{2a + \sqrt{4a^2 - x^2}} f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{2a - \sqrt{4a^2 - x^2}}^{2a + \sqrt{4a^2 - x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Для применения (1.42) достаточно область интегрирования D разбить прямой $y = 2a$ на две части (рис. 1.11, б)

$$D_1^* = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [0, 2a], \sqrt{2ay - y^2} \leq x \leq \sqrt{4ay - y^2} \right\};$$

$$D_2^* = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [2a, 4a], 0 \leq x \leq \sqrt{4ay - y^2} \right\}.$$

В этом случае получаем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2a} dy \int_{\sqrt{2ay - y^2}}^{\sqrt{4ay - y^2}} f(x, y) dx + \int_{2a}^{4a} dy \int_0^{\sqrt{4ay - y^2}} f(x, y) dx.$$

Пример 1.7. Пусть область интегрирования D ограничена линиями $y = 1$, $y = -1$, $y = x + 1$, $x = y^2$. Тогда она является пра-

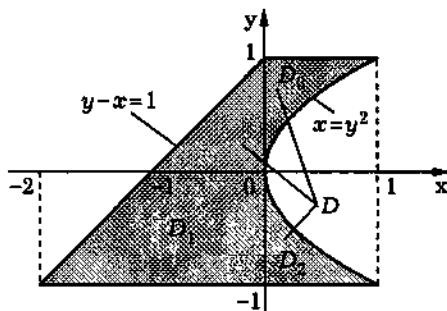


Рис. 1.12

вильной в направлении оси Ox (рис. 1.12) и может быть записана в виде $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [-1, 1], y - 1 \leq x \leq y^2\}$. Применяя формулу (1.42) представления двойного интеграла повторным, получаем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{y-1}^{y^2} f(x, y) dx.$$

Чтобы использовать формулу (1.39), можно разбить область интегрирования D на три части (см. рис. 1.12)

$$D_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [-2, 0], -1 \leq y \leq x + 1\};$$

$$D_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1], -1 \leq y \leq -\sqrt{x}\};$$

$$D_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1], \sqrt{x} \leq y \leq 1\}.$$

В этом случае двойной интеграл по области интегрирования D будет представлен суммой трех повторных:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-2}^0 dx \int_{-1}^{x+1} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Замечание 1.11. В примере 1.7 области интегрирования D_2 и D_3 симметричны относительно оси Ox . В некоторых случаях это уместно использовать. Например, при вычислении площади области D нет необходимости вычислять и площадь области D_2 , и площадь области D_3 , так как они равны. Однако в общем случае двойной интеграл по области D_2 не равен двойному интегралу по области D_3 , поскольку подынтегральная функция может иметь разное поведение в симметричных областях. Это значит, что нельзя заменить сумму двойных интегралов по областям интегрирования D_2 и D_3 , например, удвоенным интегралом по области D_3 .

Отметим еще один подобный момент. При вычислении площадей иногда удобно представить область интегрирования как разность двух областей. Например, площадь кольца естественно вычислять как разность площадей двух кругов, а не „лобовым“ вычислением двойного интеграла, так как расстановка пределов интегрирования по кольцу требует разбиения кольца на четыре области интегрирования сложной конфигурации. Но этот способ непригоден в общем случае, так как подынтегральная функция может быть не определена вне заданной области интегрирования.

Пример 1.8. Поменяем порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy.$$

Этому повторному интегралу соответствует двойной интеграл с областью интегрирования

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 4], 3x^2 \leq y \leq 12x\}.$$

Замкнутая область D ограничена прямой $y = 12x$ и параболой, заданной уравнением $y = 3x^2$ (рис. 1.13). Прямая и парабола пересекаются в начале координат и в точке $A(4; 48)$. Поэтому

переменное y изменяется в пределах отрезка $[0; 48]$, а замкнутую область D можно также представить в виде

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [0, 48], y/12 \leq x \leq \sqrt{y/3}\}.$$

Таким образом,

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy = \int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x, y) dx.$$

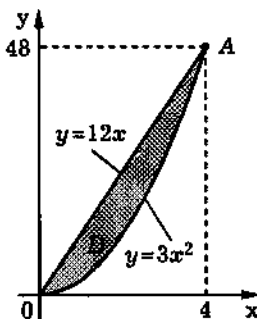


Рис. 1.13

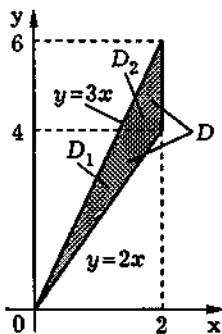


Рис. 1.14

Пример 1.9. Чтобы изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy,$$

область интегрирования (рис. 1.14)

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 2], 2x \leq y \leq 3x\}$$

необходимо разбить прямой $y = 4$ на две части

$$D_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [0, 4], y/3 \leq x \leq y/2\};$$

$$D_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [4, 6], y/3 \leq x \leq 2\}.$$

В результате получим

$$\int_0^2 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy = \int_0^4 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_{y/3}^2 f(x, y) dx.$$

Пример 1.10. Рассмотрим повторный интеграл

$$\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

Этому повторному интегралу соответствует двойной интеграл с областью интегрирования

$$D = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: y \in [0, 1], y^2/2 \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \right\},$$

которая ограничена прямыми $y = 0$, $y = 1$ и дугами параболы и окружности, заданными уравнениями $x = y^2/2$ и $x = \sqrt{4-y^2}$ (рис. 1.15). Для смены порядка интегрирования в повторном интеграле разобьем D прямыми $x = 1/2$ и $x = \sqrt{3}$ на три части

$$D_1 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1/2], 0 \leq y \leq \sqrt{2x} \right\};$$

$$D_2 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [1/2, \sqrt{3}], 0 \leq y \leq 1 \right\};$$

$$D_3 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [\sqrt{3}, 2], 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}.$$

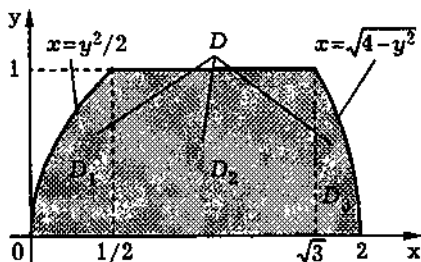


Рис. 1.15

В итоге приходим к трем повторным интегралам:

$$\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx = \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy + \\ + \int_{1/2}^{\sqrt{3}} dx \int_0^1 f(x,y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy.$$

Пример 1.11. Вычислим двойной интеграл от функции $f(x,y) = x^{p-1}y^{q-1}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, по области интегрирования D , заданной неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x + y \leq 1$ (рис. 1.16). Для сведения этого интеграла к повторному при помощи (1.39) область интегрирования представим в виде

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1-x\}$$

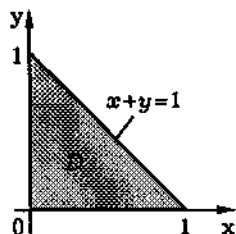


Рис. 1.16

и затем найдем

$$\iint_D x^{p-1}y^{q-1} dx dy = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} dy = \\ = \frac{1}{q} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{1}{q} B(p, q+1),$$

где $B(p, q+1)$ — бета-функция Эйлера. Используя формулу Эйлера

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

связывающую бета-функцию и гамма-функцию, и учитывая, что для гамма-функции $\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$, приходим к формуле Дирихле*

$$\iint_D x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

1.8. Криволинейные координаты на плоскости

Пусть в области $G^* \subset \mathbb{R}^2$ заданы функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u; v) \in G, \quad (1.45)$$

осуществляющие отображение области G^* на область $D^* \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что это отображение удовлетворяет следующим условиям.

1. Отображение (1.45) является биекцией (т.е. взаимно однозначно) и имеет обратное отображение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (x; y) \in D^*. \quad (1.46)$$

2. Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в G^* , причем якобиан отображения (1.45)

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.47)$$

отличен от нуля в каждой точке $(u; v) \in G$.

Второе условие означает, что якобиан отображения в силу непрерывности частных производных функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в области G^* сохраняет в G^* знак. По теореме об обратной функции обратное отображение (1.46) также непрерывно дифференцируемо и имеет ненулевой якобиан.

* П.Г.Л. Дирихле (1805–1859) — немецкий математик.

Рассмотрим замкнутую область $G \subset G^*$ и ее образ $D \subset D^*$ при отображении (1.45). В силу непрерывности прямого (1.45) и обратного (1.46) отображений множество D замкнуто. Кроме того, между *внутренностью* $\text{int}G$ множества G и *внутренностью* $\text{int}D$ множества D отображение (1.45) устанавливает взаимно однозначное соответствие. Множество $\text{int}D$, как непрерывный образ линейно связного множества $\text{int}G [V]$, *линейно связно*, т.е. $\text{int}D$ — область. Каждая точка множества D является предельной точкой его внутренней $\text{int}D$. Действительно, пусть $(x_0; y_0) \in D$. Выберем произвольную окрестность $V \subset D^*$ этой точки. Прообраз V при отображении (1.45) — это окрестность $U \subset G^*$ точки $(u_0; v_0) \in G$, являющейся прообразом точки $(x_0; y_0) \in D$. Так как G — замкнутая область, в окрестности U есть внутренние точки множества G . Им соответствуют точки в V , внутренние для множества D .

Все сказанное означает, что множество D — замкнутая область. Аналогично можно показать, что образ замкнутой области в D^* при отображении (1.46) есть замкнутая область в G^* . Таким образом, отображение (1.45) устанавливает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми областями в G^* и замкнутыми областями в D^* . Оказывается, что если отображение (1.45) удовлетворяет условиям 1 и 2, то образ любой *квадрируемой замкнутой области* также является *квадрируемой замкнутой областью* (см. 3.6).

Непрерывно дифференцируемое отображение также устанавливает взаимно однозначное соответствие между гладкими (кусочно гладкими) кривыми в G^* и гладкими (кусочно гладкими) кривыми в D^* . Действительно, пусть кривая Γ в области G^* задана параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда ее образ в области D^* при отображении (1.45) будет описываться параметрическими уравнениями

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Если кривая Γ гладкая, то функции $u(t)$ и $v(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми. В силу непрерывной дифференцируемости отображения (1.45) и *цепного правила* заключаем, что сложные функции $x(u(t), v(t))$ и $y = y(u(t), v(t))$ непрерывно дифференцируемы, а их производные можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad (1.48)$$

Для гладкой кривой Γ производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ одновременно не обращаются в нуль. Из этого следует, что и производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ одновременно не обращаются в нуль. Действительно, равенства (1.48) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ с правыми частями $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Определитель этой системы есть якобиан отображения (1.45) и не равен нулю. Следовательно, она имеет единственное решение при любых правых частях. Значит, нулевые значения $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ могут соответствовать только нулевым значениям $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$. Иначе говоря, если $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ в некоторой точке одновременно обращаются в нуль, то и $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ в некоторой точке кривой Γ одновременно обращаются в нуль.

Кусочно гладкую кривую можно представить как объединение конечного числа гладких кривых. Ясно, что образом кусочно гладкой кривой в G^* при отображении (1.45) является кусочно гладкая кривая в D^* .

Поскольку отображение (1.46), обратное к отображению (1.45), также непрерывно дифференцируемо, любой гладкой (кусочно гладкой) кривой в D^* соответствует гладкая (кусочно гладкая) кривая в G^* .

Прямой $u = u_0$ в области G^* соответствует гладкая кривая L в области D^* (рис. 1.17), задаваемая параметрическими

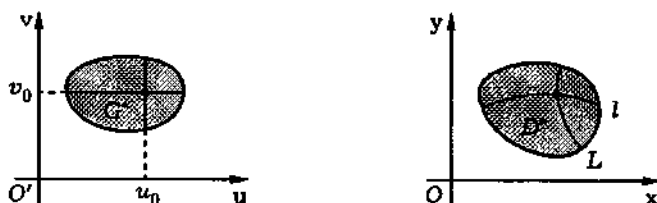


Рис. 1.17

уравнениями

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \quad (u_0; v) \in G. \quad (1.49)$$

А прямой $v = v_0$ отвечает в области D^* кривая l , определяемая уравнениями

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad (u; v_0) \in G. \quad (1.50)$$

Из взаимной однозначности отображения (1.45) следует, что через каждую точку $(x; y) \in D^*$ проходят единственная линия вида (1.49) и единственная линия вида (1.50), отвечающие некоторым значениям $u = u_0$ и $v = v_0$. Следовательно, значения u и v можно рассматривать как координаты точки $(x; y)$ области D^* . Так как линии (1.49), (1.50), отвечающие этим координатам, в общем случае являются кривыми, то значения u и v называют *криволинейными координатами в плоской области D* .

1.9. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть G^* и D^* — области в \mathbb{R}^2 и отображение (1.45), переводящее область G^* в область D^* , удовлетворяет условиям, оговоренным в 1.8. Рассмотрим *квадрируемую замкнутую область $D \subset D^*$* и двойной интеграл от функции $f(x, y)$ с областью интегрирования D^* . Задача о замене переменных в двойном интеграле состоит в том, чтобы преобразовать двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D в двойной интеграл по

области G , переходя в подынтегральном выражении от переменных x, y к переменным u, v .

Теорема 1.12. Пусть отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u; v) \in G^*, \quad (1.51)$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $G^* \subset \mathbb{R}^2$ на область $D^* \subset \mathbb{R}^2$, причем якобиан $J(u, v)$ этого отображения в G^* отличен от нуля. Тогда площадь S квадратуемой замкнутой области $D \subset D^*$ может быть выражена двойным интегралом по ее прообразу $G \subset G^*$:

$$S = \iint_D dx dy = \iint_G |J(u, v)| du dv. \quad (1.52)$$

◀ Дадим доказательство этой теоремы не вполне строгое, но зато прозрачное с геометрической точки зрения.

Рассмотрим в координатной плоскости uOv прямоугольник $N_1N_2N_3N_4$ с малыми сторонами Δu и Δv , параллельными координатным осям Ou и Ov (рис. 1.18). Этот прямоугольник, имеющий площадь $\Delta\sigma = \Delta u \Delta v$, при отображении (1.51) переходит в криволинейный четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ в D^* . Вершины прямоугольника $N_1N_2N_3N_4$, которые можно записать в виде

$$N_1(u; v), \quad N_2(u; v + \Delta v), \quad N_3(u + \Delta u; v + \Delta v), \quad N_4(u + \Delta u; v),$$

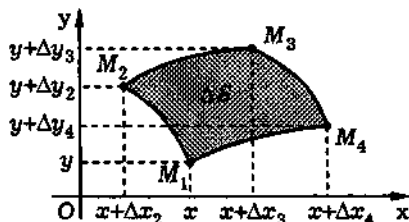
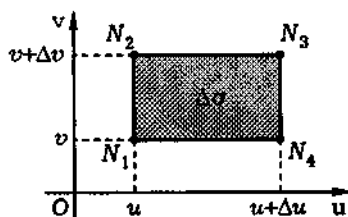


Рис. 1.18

при отображении (1.52) преобразуются в точки

$$M_1(x; y), \quad M_i(x + \Delta x_i; y + \Delta y_i), \quad i = 2, 3, 4. \quad (1.53)$$

Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка по сравнению с Δu и Δv , приближенно получаем

$$\Delta x \approx dx = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \quad \Delta y \approx dy = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v, \quad (1.54)$$

где все производные вычислены в точке $(u; v) \in G^*$.

Точки M_2 и M_4 лежат на линиях $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ соответственно, и поэтому для точки M_2 имеем $\Delta u = 0$, а для точки M_4 — $\Delta v = 0$. Учитывая (1.54), записываем

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &\approx \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, & \Delta y_2 &\approx \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v; \\ \Delta x_3 &\approx \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, & \Delta y_3 &\approx \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v; \\ \Delta x_4 &\approx \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, & \Delta y_4 &\approx \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u. \end{aligned}$$

Используя (1.53), заключаем, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_4} &= \{\Delta x_4; \Delta y_4\} \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\}, \\ \overrightarrow{M_2 M_3} &= \{\Delta x_3 - \Delta x_2; \Delta y_3 - \Delta y_2\} \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\}, \end{aligned}$$

где все производные вычислены в точке $(u; v)$. Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{M_1 M_4}$ и $\overrightarrow{M_2 M_3}$ коллинеарны и равны по длине. Следовательно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка по сравнению с Δu и Δv можно четырехугольник $M_1 M_2 M_3 M_4$ приближенно считать параллелограммом, а его площадь считать равной длине векторного произведения

векторов $\overrightarrow{M_1M_4}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ [III]. Учитывая значения координат векторов в системе координат Oxy , находим

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx |\overrightarrow{M_1M_4} \times \overrightarrow{M_1M_2}| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v = |J(u, v)| \Delta u \Delta v. \quad (1.55) \end{aligned}$$

Рассматривая разбиение замкнутой области G прямыми, параллельными координатным осям Ou и Ov , на прямоугольники с малыми сторонами и пренебрегая „неправильными“ элементами у ее границы ∂G , в результате отображения (1.51) получаем разбиение области $D \subset D^*$ на криволинейные четырехугольники рассмотренного вида. Суммируя полученные выражения для площадей этих четырехугольников, приходим к (1.52). ►

Замечание 1.12. Выражение

$$\Delta S = |J(u, v)| \Delta u \Delta v, \quad (1.56)$$

входящее в (1.55), обычно называют *элементом площади в криволинейных координатах*. Если произведение $\Delta u \Delta v$ рассматривать как элемент $\Delta \sigma$ площади в координатах u и v , то (1.56) можно переписать в виде $\Delta S = |J(u, v)| \Delta \sigma$, откуда $|J(u, v)| = \Delta S / \Delta \sigma$, т.е. абсолютная величина якобиана отображения играет роль коэффициента растяжения элемента площади в окрестности точки $(u; v)$ при заданном отображении (1.51).

Замечание 1.13. В теореме 1.12 предполагалось, что отображение (1.45) области G^* на область D^* является взаимно однозначным. Однако выражение (1.52) для площади в криволинейных координатах остается в силе и в том случае, если это условие нарушено в отдельных точках или вдоль отдельных

линий. Рассмотрим в качестве примера отображение прямоугольника

$$G = \{(r; \varphi) \in \mathbb{R}^2: r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

на круг при помощи отображения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (1.57)$$

которое соответствует введению на плоскости xOy полярных координат. Это отображение не удовлетворяет условиям теоремы 1.12, так как в любой области, содержащей G , отображение (1.57) не является взаимно однозначным. Тем не менее в данном случае формула (1.52) верна. Покажем это.

Пусть область $G^* \subset \mathbb{R}^2$ задана неравенствами $0 < r < a + \delta$, $0 < \varphi < 2\pi$, а замкнутая область G' — неравенствами $\delta \leq r \leq a$, $\delta \leq \varphi \leq 2\pi - \delta$. Тогда $G' \subset G^*$, при отображении (1.57) область G^* переходит в область D^* , представляющую собой круг радиуса a с разрезом по радиусу, а замкнутая область G' — в замкнутую область D' , получающуюся из замкнутого круга радиуса a с центром в начале координат выбрасыванием круга радиуса $\delta < a$ с тем же центром и сектора с центральным углом 2δ (рис. 1.19). На основании теоремы 1.12 для площади S_δ замкнутой области D' можно записать формулу (1.52). Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, заключаем, что формула (1.52) остается верной и для прямоугольника G .

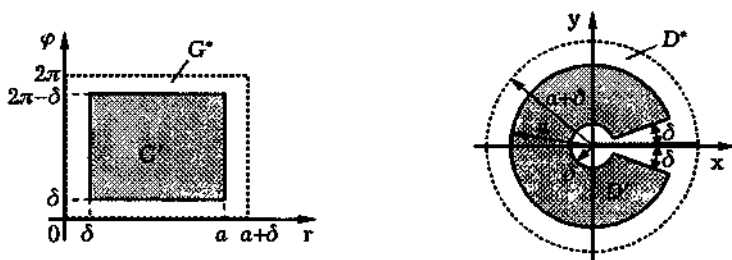


Рис. 1.19

Пример 1.12. Вычислим якобиан отображения $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, соответствующего полярным координатам на плоскости:

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Якобиан этого отображения отличен от нуля всюду, кроме полюса полярной системы координат ($r = 0$), совпадающего с началом прямоугольной системы координат ($x = y = 0$). Следовательно, в соответствии с (1.56), элемент площади в полярных координатах равен $\Delta S = r \Delta r \Delta \varphi$. #

Перейдем теперь к выводу общей формулы замены переменных в двойном интеграле, а именно докажем следующее утверждение.

Теорема 1.13. Пусть отображение (1.51) взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $G^* \subset \mathbb{R}^2$ на область $D^* \subset \mathbb{R}^2$, причем якобиан $J(u, v)$ этого отображения в G^* отличен от нуля. Если $D \subset D^*$ — квадратируемая замкнутая область и $f(x, y)$ — функция, непрерывная в D или же ограниченная в D и непрерывная в D всюду, кроме некоторого множества площади нуль, то верна следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (1.58)$$

◀ Рассмотрим разбиение замкнутой области G на n частичных областей G_i с площадями $\Delta \sigma_i$, $i = \overline{1, n}$. Образы D_i частичных областей G_i , $i = \overline{1, n}$, при отображении (1.51) образуют разбиение замкнутой области D . В каждой частичной области D_i , площадь которой обозначим через ΔS_i , выберем произвольную

точку $(\xi_i; \eta_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (1.59)$$

для функции $f(x, y)$, отвечающую двойному интегралу в левой части (1.58).

Для каждой из частичных областей в соответствии с (1.52) имеем

$$\Delta S_i = \iint_{G_i} |J(u, v)| du dv, \quad i = \overline{1, n}.$$

Согласно теореме 1.8 о среднем значении для двойного интеграла, в частичной области G_i найдется точка $(u_i^*; v_i^*) \in G_i$, для которой справедливо равенство $\Delta S_i = |J(u_i^*, v_i^*)| \Delta \sigma_i$. Так как в (1.59) выбор точек $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$, $i = \overline{1, n}$, произволен, то можно положить $\xi_i = x(u_i^*, v_i^*)$ и $\eta_i = y(u_i^*, v_i^*)$. Тогда (1.59) примет вид

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x(u_i^*, v_i^*), y(u_i^*, v_i^*)) |J(u_i^*, v_i^*)| \Delta \sigma_i, \quad (1.60)$$

а это есть интегральная сумма, отвечающая двойному интегралу в правой части (1.58). Этот интеграл существует, поскольку подынтегральная функция ограничена в G и непрерывна всюду, кроме, быть может, множества площади нуль. Если теперь диаметр разбиения замкнутой области G устремить к нулю, то в силу равномерной непрерывности отображения $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ в G диаметр разбиения замкнутой области D также будет стремиться к нулю. При этом (1.60) перейдет в (1.58). ►

Замечание 1.14. Замену переменных в двойном интеграле (как и в определенном интеграле) применяют для приведения его к виду, более удобному для вычисления. Однако в случае двойного интеграла, используя замену переменных, стремятся упростить не только подынтегральную функцию, но и вид

области интегрирования, причем вторая цель зачастую более важна, чем первая. Упрощение вида области интегрирования облегчает расстановку пределов в двойном интеграле и вычисление повторного интеграла.

В результате замены переменных область интегрирования двойного интеграла изменяется. В общем случае необходимо построить новую область интегрирования и в ней провести расстановку пределов интегрирования. В простейших ситуациях расстановку пределов можно выполнять на эскизе исходной области интегрирования, используя координатные линии криволинейной системы координат.

Пример 1.13. В следующих интегралах перейдем к полярным координатам и расставим в этих координатах пределы интегрирования:

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy; \quad \text{б) } \int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy; \quad \text{в) } \iint_D f(x, y) dx dy,$$

где область интегрирования D — часть полуплоскости $x \geq 0$, ограниченная лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

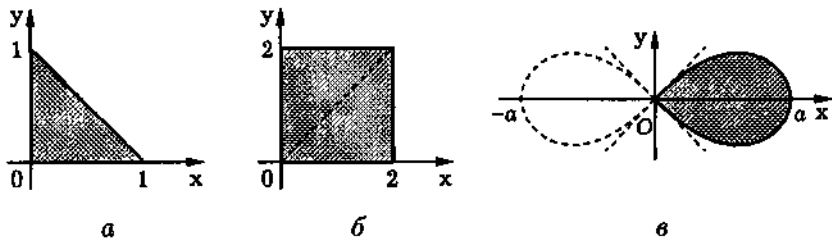


Рис. 1.20

а. Область интегрирования в данном случае описывается неравенствами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ (рис. 1.20, а). Уравнение линии $y = 1 - x$, или $x + y = 1$, в полярных координатах имеет вид $r(\cos \varphi + \sin \varphi) = 1$. Поэтому область интегрирования в

полярных координатах r , φ задается неравенствами

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Исходный интеграл в новых координатах имеет вид

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б. В полярных координатах линии $x = 2$ и $y = 2$ (рис. 1.20, б) описываются уравнениями $r \cos \varphi = 2$ и $r \sin \varphi = 2$. Поскольку область интегрирования в данном случае находится в первом квадранте, полярный угол изменяется от 0 до $\pi/2$. Но при этом луч $\varphi = \varphi_0$, выходящий из начала координат, пересекает границу области в точке $r = \frac{2}{\cos \varphi_0}$, если $0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{4}$, и в точке $r = \frac{2}{\sin \varphi_0}$, если $\frac{\pi}{4} \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому при расстановке пределов в полярных координатах область интегрирования следует разделить на две части. Тем самым двойной интеграл будет представлен как сумма двух повторных. Учитывая уравнения ограничивающих область линий в полярных координатах, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

в. Лемниската (рис. 1.20, в) в полярных координатах имеет уравнение $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Пределы изменения переменного φ на-

ходим из условия неотрицательности подкоренного выражения. Это дает неравенство $\cos 2\varphi \geq 0$, откуда получаем два отрезка изменения φ : $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. В соответствии с условиями задачи выбираем первый из них. При этом двойной интеграл преобразуется в повторный:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Пример 1.14. Вычислим массу m полукруглой пластины диаметра a с центром в точке $C(a/2; 0)$, плотность которой в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат (рис. 1.21).

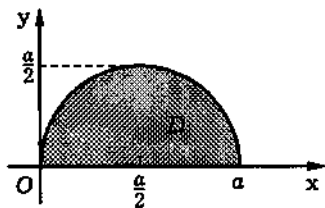


Рис. 1.21

Пластина занимает замкнутую область D , ограниченную снизу осью Ox , а сверху окружностью $x^2 + y^2 = ax$. Плотность пластины определяется функцией $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, где k —

коэффициент пропорциональности. Масса пластины может быть выражена двойным интегралом

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Форма области интегрирования D и вид подынтегральной функции подсказывают, что в данном случае удобно вычислять двойной интеграл в полярных координатах r и φ . Полярный угол при движении луча $\varphi = \varphi_0$ по области интегрирования пробегает отрезок $[0, \pi/2]$, а полярный радиус r при фиксиро-

ванном значении $\varphi \in [0, \pi/2]$ — отрезок $[0, a \cos \varphi]$. Поэтому

$$\begin{aligned} m &= k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr = \\ &= \frac{ka^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{ka^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d\sin \varphi = \\ &= \frac{ka^3}{3} \int_0^1 (1 - t^2) dt = \frac{ka^3}{3} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{9} ka^3. \end{aligned}$$

Пример 1.15. Найдём площадь замкнутой области D , ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ и прямыми $x = y$, $y = 0$ (рис. 1.22).

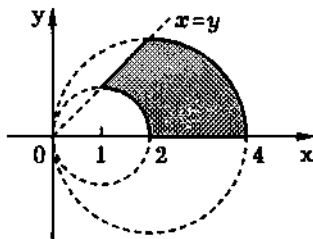


Рис. 1.22

Согласно свойствам двойного интеграла, площадь D равна двойному интегралу от единичной функции с областью интегрирования D . На рис. 1.22 видно, что область изменения полярного угла φ есть отрезок $[0, \pi/4]$, а изменение полярного радиуса описывается неравенствами $2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi$. Действительно, произвольный луч $\varphi = \varphi_0$, выходящий из начала координат, пересекает границу области при $r = 2 \cos \varphi_0$ (точка входа) и при $r = 4 \cos \varphi_0$ (точка выхода). Найденные соотношения позволяют расставить пределы интегрирования в двойном

интеграле в полярной системе координат, и в результате мы получаем

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4}(\pi + 2). \quad \# \end{aligned}$$

Если область интегрирования ограничена эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.61)$$

то для вычисления двойного интеграла удобно использовать замену переменных $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Эта замена переменных соответствует переходу к криволинейным координатам, называемым *обобщенными полярными координатами*. В этих координатах уравнение эллипса имеет вид $r = 1$, а якобиан замены переменных равен

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Пример 1.16. Вычислим объем V тела, ограниченного трехосным эллипсоидом (рис. 1.23)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

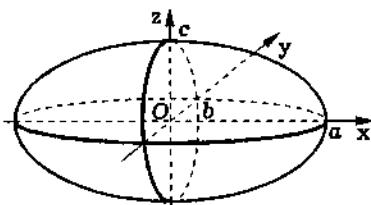


Рис. 1.23

Из соображений симметрии вытекает, что искомый объем равен удвоенному значению интеграла от функции

$$z(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

по замкнутой области D , ограниченной эллипсом (1.61). В обобщенных полярных координатах функция $z(x, y)$ преобразуется к виду $z(r, \varphi) = c\sqrt{1 - r^2}$, а области интегрирования D соответствует прямоугольник

$$G = \{(r; \varphi) \in \mathbb{R}^2: r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D z(x, y) dx dy = 2 \iint_G z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) abr dr d\varphi = \\ &= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = -\frac{4\pi}{3} abc (1 - r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi abc. \quad \# \end{aligned}$$

Отметим, что обобщенные полярные координаты можно ввести в более общем виде с помощью отображения

$$\begin{cases} x = ar \cos^m \varphi, \\ y = br \sin^m \varphi, \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.62)$$

В этом случае $J(r, \varphi) = tabr(\sin \varphi \cos \varphi)^{m-1}$. При вычислении площади области

$$D' = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2: (x/a)^{1/4} + (y/b)^{1/4} = 1, x \in [0, a], y \in [0, b] \right\}$$

целесообразно в (1.62) выбрать $m = 8$. Тогда прообразом D' при отображении (1.62) будет прямоугольник

$$G' = \{(r; \varphi) \in \mathbb{R}^2: r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi/2]\}.$$

Используя (1.52), находим

$$\begin{aligned}
 S' &= \iint_{D'} dx dy = 8ab \iint_{G'} r(\sin \varphi \cos \varphi)^7 dr d\varphi = \\
 &= 8ab \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi \cos \varphi)^7 d\varphi \int_0^1 r dr = 4ab \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi)^3 \sin^7 \varphi d(\sin \varphi) = \\
 &= 4ab \int_0^1 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6)t^7 dt = 4ab \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{12} - \frac{1}{14} \right) = \frac{ab}{70}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.17. Найдем площадь области D , ограниченной кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ и $y = 2x^2$ (рис. 1.24). Положим $xy = u$ и $y/x^2 = v$. Отсюда $x = (u/v)^{1/3}$ и $y = u^{2/3}v^{1/3}$, и в соответствии с (1.47)

$$\begin{aligned}
 J(u, v) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-4/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{9}(v^{-1} + 2v^{-1}) = \frac{1}{3v}.
 \end{aligned}$$

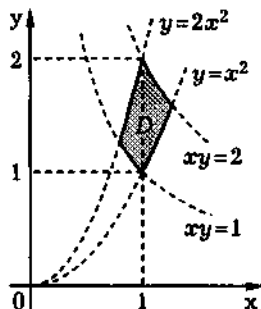


Рис. 1.24

Криволинейному четырехугольнику в плоскости xOy (см. рис. 1.24) в криволинейных координатах u, v соответствует

квадрат

$$G = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2: u \in [1, 2], v \in [1, 2]\}.$$

Поэтому при помощи (1.52) находим

$$S = \iint_D dx dy = \int_G \frac{du dv}{3v} = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{3} \ln v \Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{3}.$$

1.10. Площадь поверхности

Одно из приложений двойного интеграла — вычисление площадей поверхностей. Остановимся на том, что следует понимать под площадью поверхности.

Пусть Σ — некоторая *гладкая поверхность* в пространстве, ограниченная кусочно гладким контуром Γ . Возьмем *разбиение* T поверхности Σ на *частичные области* $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, проведя на поверхности Σ кусочно гладкие кривые. В каждой частичной области Σ_i произвольным образом выберем точку M_i , построим в этой точке *касательную плоскость* к поверхности Σ и проекцию σ_i частичной области Σ_i на эту плоскость. Получим плоскую замкнутую область σ_i , ограниченную некоторым кусочно гладким контуром (рис. 1.25). Значит, эта *замкнутая область квадратуема*. Обозначим через $\Delta\sigma_i$ площадь σ_i . Из этих площадей составим сумму

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i.$$

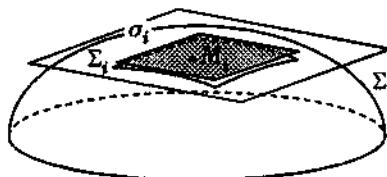


Рис. 1.25

Диаметром $d(T)$ разбиения T поверхности Σ , как и ранее, назовем максимальный из диаметров d_i частичных областей Σ_i . Пусть существует конечный предел σ сумм $\sigma(T)$ при $d(T) \rightarrow 0$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения $T = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$ поверхности Σ , имеющего диаметр $d(T) < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе точек $M_i \in \Sigma_i$ верно неравенство $|\sigma(T) - \sigma| < \varepsilon$. В этом случае поверхность Σ называют **квадрируемой поверхностью**, а число σ — **площадью** этой поверхности.

В этом параграфе ограничимся частным (но важным) случаем, когда поверхность Σ является графиком некоторой функции $f(x, y)$, определенной в замкнутой области D с кусочно гладкой границей ∂D . Общий случай рассмотрен в рамках теории *поверхностного интеграла*.

Теорема 1.14. Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной кусочно гладким контуром. Тогда поверхность $z = f(x, y)$ (график функции $f(x, y)$) является гладкой и квадрируемой, а ее площадь σ равна

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1.63)$$

◀ Так как функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то в каждой точке поверхности Σ определен *единичный нормальный вектор к поверхности*, непрерывно меняющийся от точки к точке. А это и значит, что поверхность Σ является гладкой.

Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$ поверхности Σ . Этому разбиению соответствует разбиение $T_D = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой области D , частичными областями которого являются ортогональные проекции D_i поверхностей Σ_i на плоскость xOy . В каждой частичной области Σ_i разбиения T выберем точку M_i , и пусть $P_i(x_i; y_i)$ — проекция точки

M_i на плоскость xOy . Касательная плоскость к поверхности Σ в точке M_i задается уравнением

$$z - z_i = f'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f'_y(x_i, y_i)(y - y_i),$$

где $z_i = f(x_i, y_i)$. Угол наклона γ_i этой плоскости по отношению к координатной плоскости xOy определяется равенством

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},$$

в котором частные производные f'_x и f'_y вычислены в точке P_i .

Пусть σ_i — ортогональная проекция частичной области Σ_i на касательную плоскость к Σ в точке M_i . Рассмотрим также ортогональную проекцию \tilde{D}_i замкнутой области σ_i на плоскость xOy . Площадь $\Delta\sigma_i$ замкнутой области σ_i связана с площадью ΔS_i замкнутой области \tilde{D}_i равенством $\Delta S_i = (\cos \gamma_i)\Delta\sigma_i$. Замкнутая область \tilde{D}_i , вообще говоря, не совпадает с частичной областью D_i разбиения T_D , но при стремлении диаметра $d(T_D)$ к нулю различием между D_i и \tilde{D}_i можно пренебречь. Это значит, что можно приближенно принять ΔS_i за площадь частичной области D_i . С учетом этого допущения получаем

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta S_i}{\cos \gamma_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(x_i, y_i))^2 + (f'_y(x_i, y_i))^2} \Delta S_i. \end{aligned}$$

Мы пришли к интегральной сумме, составленной для функции $\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$ по замкнутой области D . В пределе при $d(T) \rightarrow 0$ имеем $d(T_D) \rightarrow 0$ и в результате получаем равенство (1.63). ►

Из доказанной теоремы легко получить формулы, аналогичные (1.63), для случаев, когда поверхность Σ задана уравнением $x = g(y, z)$ или $y = h(x, z)$.

Пример 1.18. Найдем площадь части параболоида $z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 1.26).

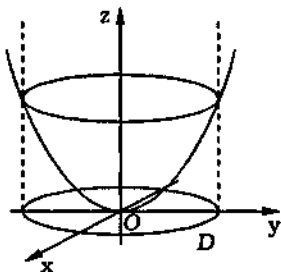


Рис. 1.26

Так как частные производные $z'_x = 2x$ и $z'_y = 2y$ функции $z(x, y) = x^2 + y^2$ непрерывны в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leq a^2$, то площадь σ рассматриваемой поверхности, согласно теореме 1.14, может быть представлена двойным интегралом

$$\sigma = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Исходя из вида функции и формы области интегрирования, используем полярные координаты:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{\pi}{6} \left((1 + 4a^2)^{3/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Пример 1.19. Вычислим площадь части цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, заключенной между плоскостью xOy и конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (над плоскостью xOy , рис. 1.27, а).

Рассматриваемая поверхность симметрична относительно координатной плоскости xOz . Поэтому можно ограничиться

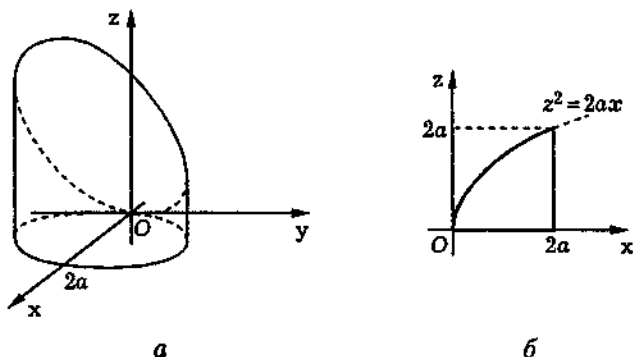


Рис. 1.27

вычислением половины площади поверхности, а именно той ее части, которая находится в полупространстве $y \geq 0$. Указанная часть поверхности может интерпретироваться как график функции $y(x, z) = \sqrt{2ax - x^2}$, а ее проекцией на плоскость xOz является замкнутая область (рис. 1.27, б)

$$D = \left\{ (x; z): 0 \leq x \leq 2a, 0 \leq z \leq \sqrt{2ax} \right\}.$$

В результате для площади поверхности σ получаем

$$\sigma = 2 \iint_D \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz,$$

где y'_x и y'_z — частные производные функции $y(x, z)$. Вычисляя эти частные производные и подставляя в формулу, находим

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \iiint_D \sqrt{1 + \left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} \right)^2} dx dz = \\ &= 2 \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} dz = 2a\sqrt{2a} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} = \\ &= -4a\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a-x} \Big|_0^{2a} = 8a^2. \end{aligned}$$

1.11. Несобственные двойные интегралы

До сих пор мы рассматривали двойные интегралы от ограниченных функций по ограниченной области интегрирования. Однако, так же как и в случае определенного интеграла, при решении прикладных задач и рассмотрении ряда теоретических вопросов нередко возникает необходимость использования двойных интегралов от неограниченных функций по ограниченной области интегрирования или от ограниченных функций, но по неограниченной области интегрирования.

Сначала рассмотрим случай неограниченной области интегрирования.

Пусть $D \in \mathbb{R}^2$ — неограниченная область. Последовательность $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ квадратуемых замкнутых областей D_i назовем *монотонным исчерпыванием* области D , если выполняются два условия:

- 1) $D_i \subset \text{int } D_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$;
- 2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = D$.

Здесь $\text{int } D_i$ обозначает внутренность замкнутой области D_i .

Определение 1.3. Пусть в неограниченной области D задана функция $f(x, y)$, интегрируемая в любой квадратуемой замкнутой подобласти в D . Если для любого монотонного исчерпывания $\{D_i\}$ области D существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy,$$

не зависящий от выбора последовательности $\{D_i\}$, то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x, y)$ по неограниченной области (*несобственным интегралом первого рода*) и обозначают обычным образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Итак, по определению

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy. \quad (1.64)$$

Если этот предел существует и конечен, то *несобственный интеграл* называют *сходящимся*, а в противном случае — *расходящимся*.

Определение 1.3 позволяет перенести на несобственные интегралы ряд свойств собственных (т.е. обычных двойных) интегралов, а именно: линейность интеграла, аддитивность интеграла, интегрирование неравенств, сведение кратного интеграла к повторному, формулу замены переменных и др. Например, если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ — непрерывно дифференцируемое, взаимно однозначное отображение неограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ на область $D \subset \mathbb{R}^2$ и якобиан этого отображения в G отличен от нуля, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (1.65)$$

Для неотрицательных функций справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.15. Пусть даны неотрицательная в неограниченной области D функция $f(x, y)$ и монотонное исчерпывание $\{D_i\}$ области D . Для сходимости несобственного интеграла от функции $f(x, y)$ по области D необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел

$$\iint_{D_i} f(x, y) dx dy, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1.66)$$

была ограниченной.

◀ **Необходимость.** Предположим, что несобственный интеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ сходится. Тогда существует конечный предел (1.64), и последовательность чисел (1.66), будучи сходящейся, ограничена [I-6.4].

Достаточность. Пусть последовательность чисел (1.66) ограничена. Тогда для любого номера i имеем $D_i \subset D_{i+1}$. Отсюда в силу неотрицательности функции $f(x,y)$ следуют неравенства

$$\iint_{D_i} f(x,y) dx dy \leq \iint_{D_{i+1}} f(x,y) dx dy, \quad i \in \mathbb{N},$$

а это означает, что последовательность чисел (1.66) является неубывающей. Согласно теореме Вейерштрасса [I-6.5], монотонная и ограниченная последовательность чисел (1.66) сходится к конечному пределу

$$I = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{D_i} f(x,y) dx dy. \quad (1.67)$$

При этом в силу возрастания последовательности

$$\iint_{D_i} f(x,y) dx dy \leq I. \quad (1.68)$$

Итак, доказано, что для фиксированной последовательности $\{D_i\}$, монотонно исчерпывающей область D , существует конечный предел соответствующей последовательности двойных интегралов. Далее следует показать, что такой предел существует и для любого другого монотонного исчерпывания и что он не зависит от выбора монотонного исчерпывания.

Выберем еще одно монотонное исчерпывание $\{G_i\}$ области D и в этой последовательности зафиксируем произвольную замкнутую область G_k . По условию замкнутая область G_k ограничена, как квадратуемая, а потому является компактом. Так

как по определению монотонного исчерпывания $D_i \subset \text{int } D_{i+1}$ для всех индексов i , последовательность областей $\text{int } D_i$ покрывает D , т.е. $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int } D_i$. Компакт G_k содержится в D , и поэтому последовательность областей $\text{int } D_i$, $i \in \mathbb{N}$, является открытым покрытием G_k . Из этого покрытия можно выделить конечный набор областей $\text{int } D_{i_1}, \dots, \text{int } D_{i_m}$, в совокупности накрывающих G_k . Но $\text{int } D_{i_1} \subset \dots \subset \text{int } D_{i_m}$ при $i_1 \leq \dots \leq i_m$. Поэтому $G_k \subset \text{int } D_{i_m} \subset D_{i_m}$. В силу неотрицательности функции $f(x, y)$ и неравенства (1.68) имеем

$$\iint_{G_k} f(x, y) dx dy \leq \iint_{D_{i_m}} f(x, y) dx dy \leq I.$$

Так как замкнутая область G_k была выбрана произвольно, то справедливы неравенства

$$\iint_{G_i} f(x, y) dx dy \leq I, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Но последовательность интегралов $\iint_{G_i} f(x, y) dx dy$ является убывающей, как и последовательность интегралов по замкнутым областям D_i . Следовательно, она сходится, а ее предел J не превосходит числа I , т.е.

$$J = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{G_i} f(x, y) dx dy \leq I.$$

Поменяв местами последовательности $\{D_i\}$ и $\{G_i\}$, заключаем, что верно и противоположное неравенство $I \leq J$. Значит, $I = J$, т.е. пределы интегралов по двум произвольным последовательностям, исчерпывающим область D , совпадают. ►

Пример 1.20. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Положим

$$D_k = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq k^2\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{D_k\}$ состоит из квадратуемых замкнутых областей и монотонно исчерпывает плоскость \mathbb{R}^2 . Пусть

$$I_k = \iint_{D_k} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$I_k = \iint_{D_k} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k e^{-r^2} r dr = -2\pi \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^k = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Отсюда, согласно определению несобственного интеграла, заключаем, что

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \pi. \quad (1.69)$$

Найденное значение интеграла I позволяет вычислить интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Действительно, сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Поэтому в соответствии с (1.69)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

В силу четности функции $y = e^{-x^2}$ из последнего равенства следует, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Теорема 1.16 (признак сравнения). Пусть в неограниченной области D функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Тогда, если сходится несобственный интеграл $\iint_D g(x, y) dx dy$, то сходится и несобственный интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, а если несобственный интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ расходится, то расходится и несобственный интеграл $\iint_D g(x, y) dx dy$.

◀ Доказательство теоремы практически не отличается от доказательства аналогичной теоремы для несобственного интеграла от функции одного действительного переменного, и мы не будем его приводить. ▶

Пример 1.21. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$I = \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}$$

в зависимости от значения показателя степени $p \in \mathbb{R}$.

Для исследования сходимости этого интеграла удобно ввести полярные координаты r и φ на плоскости. В этом случае область интегрирования D можно описать неравенством $r \geq 1$.

После расстановки пределов интегрирования в полярных координатах получим

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{r dr}{r^p} = \\
 &= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{p-1}} = \frac{2\pi}{2-p} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{2-p} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

При $p > 2$ имеем $I = \frac{2\pi}{p-2}$, т.е. несобственный интеграл сходится, а при $p \leq 2$ он расходится.

Функцию

$$g(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}$$

удобно использовать в качестве функции сравнения при исследовании на сходимость несобственных двойных интегралов по неограниченной области интегрирования.

Определение 1.4. Двойной *несобственный интеграл* $\iint_D f(x, y) dx dy$ по неограниченной области D называют *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл $\iint_D |f(x, y)| dx dy$.

Как и в случае однократных несобственных интегралов, абсолютная сходимость несобственного двойного интеграла по неограниченной области означает его сходимость.

Теорема 1.17. Если сходится несобственный интеграл $\iint_D |f(x, y)| dx dy$, то несобственный интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ также сходится.

◀ Введем в рассмотрение две неотрицательные функции

$$f_+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & f(x, y) \geq 0; \\ 0, & f(x, y) < 0; \end{cases}$$

$$f_-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y), & f(x, y) < 0; \\ 0, & f(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Очевидны соотношения

$$f_+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}.$$

Так как

$$0 \leq f_+(x, y) \leq |f(x, y)| \quad \text{и} \quad 0 \leq f_-(x, y) \leq |f(x, y)|$$

при $(x, y) \in D$, то в силу признака сравнения из сходимости несобственного интеграла от функции $|f(x, y)|$ по неограниченной области D вытекает сходимость несобственных интегралов от функций $f_+(x, y)$ и $f_-(x, y)$ по той же области. Следовательно, согласно свойству линейности несобственного интеграла, сходится несобственный интеграл от функции $f_+(x, y) - f_-(x, y) = f(x, y)$. ▶

Важнейшим отличием двойных несобственных интегралов от однократных является то, что для двойных интегралов верно и обратное утверждение: из сходимости несобственного двойного интеграла следует его абсолютная сходимость.

Теорема 1.18. Если несобственный двойной интеграл сходится, то он сходится абсолютно. #

Из теорем 1.17 и 1.18 следует, что понятия сходимости и абсолютной сходимости для двойных несобственных интегралов по неограниченной области совпадают, т.е. сходимость двойного несобственного интеграла равносильна его абсолютной сходимости.

Несобственные интегралы от неограниченной функции по ограниченной области (или **несобственные интегралы второго рода**) вводятся аналогично несобственным интегралам по неограниченной области. Для них остается в силе все сказанное выше. Поэтому рассмотрим лишь один частный случай таких интегралов.

Пусть в ограниченной замкнутой области $D \in \mathbb{R}^2$ задана функция $f(x, y)$, не ограниченная только в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, которая может быть внутренней точкой D или располагаться на границе этой замкнутой области. В этом случае исчерпывание в D можно строить следующим образом. Выберем последовательность квадрируемых областей W_k , для которых $M_0 \in \overline{W_{k+1}} \subset W_k$, $k \in \mathbb{N}$ (рис. 1.28), а последовательность диаметров областей W_k стремится к нулю. Тогда множества $D_k = D \setminus W_k$ будут замкнутыми областями, удовлетворяющими условиям $D_k \subset \text{int } D_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_k = D \setminus \{M_0\}$. Значит, последовательность $\{D_k\}$ является исчерпыванием множества $D \setminus \{M_0\}$.

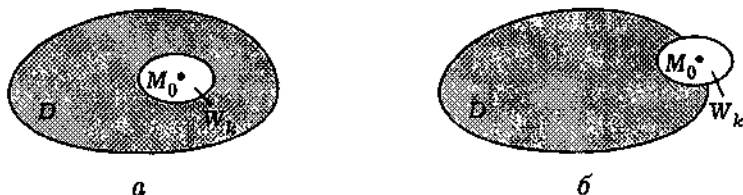


Рис. 1.28

Если функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из замкнутых областей D_k и последовательность интегралов

$$\iint_{D_k} f(x, y) dx dy, \quad k \in \mathbb{N},$$

стремится к конечному пределу I , причем этот предел не зависит от выбора областей W_k , то этот предел есть **несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x, y)$ по области D** .

Пример 1.22. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\iint_D \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^p}$$

по ограниченной области $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

При переходе к полярным координатам рассматриваемый интеграл преобразуется к следующему:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{p/2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r dr}{r^p} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{p-1}}.$$

Несобственный (при $p > 1$) интеграл $\int_0^1 \frac{dr}{r^{p-1}}$, как известно [VI], сходится при $p - 1 < 1$, т.е. при $p < 2$, и расходится при $p \geq 2$. #

Как и в случае несобственного двойного интеграла по неограниченной области, функцию

$$g(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^p}$$

удобно использовать в качестве функции сравнения при исследовании на сходимость несобственных интегралов от неограниченных функций.

Вопросы и задачи

1.1. В чем отличие интегральной суммы от нижней и верхней сумм Дарбу, отвечающих фиксированному разбиению плоской замкнутой области?

1.2. Вычислить интеграл

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

по области интегрирования D , ограниченной прямыми $y = x$, $x = 2$ и гиперболой $xy = 1$.

1.3. Вычислить интеграл

$$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy$$

по треугольнику D , ограниченному прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

1.4. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$\text{а) } \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y) dy; \quad \text{б) } \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dy;$$

$$\text{в) } \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx; \quad \text{г) } \int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y) dx.$$

1.5. Вычислить интеграл

$$\iint_D x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dx dy, \quad p \geq 1, q \geq 1, r \geq 1,$$

по области интегрирования D , заданной неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

1.6. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

а) плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 1$ и поверхностью $z = x^2 + y + 1$;

б) плоскостями $y = 1$, $z = 0$, параболоческим цилиндром $y = x^2$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$;

в) плоскостями $z = 0$, $z = \lambda x + \mu y + h$ ($h > 0$) и эллиптическим цилиндром $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

г) плоскостью $z = 0$ и цилиндрами $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$.

1.7. Найти объем тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ из шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

1.8. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными кривыми:

а) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$;

в) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$; г) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$.

1.9. Определить площади криволинейных четырехугольников, ограниченных заданными кривыми (во всех случаях $0 < a < b$ и $0 < p < q$):

а) гиперболами $xy = p$, $xy = q$ и прямыми $y = ax$, $y = bx$;

б) параболлами $x^2 = py$, $x^2 = qy$ и прямыми $y = ax$, $y = bx$;

в) прямыми $x + y = p$, $x + y = q$, $y = ax$, $y = bx$.

1.10. Вычислить интеграл $\iint_D xy \, dx \, dy$ по области интегрирования D , ограниченной петлей кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{c}$$

и расположенной в первом координатном угле.

1.11. Вычислить несобственный интеграл

$$\iint_D e^{-x-y} \frac{\cos(2k\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}} \, dx \, dy$$

по области интегрирования D , заданной неравенствами $x > 0$, $y > 0$. Здесь k — некоторая константа.

1.12. Пусть D — треугольник, заданный неравенствами $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x$, а $f(x)$ — произвольная непрерывная на отрезке $[0, a]$ функция. Преобразуя двойной интеграл

$$\iint_D \frac{f(y) dx dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

в повторный двумя способами, доказать тождество

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} \int_0^x \frac{f(y) dy}{\sqrt{x-y}} = \pi \int_0^a f(y) dy.$$

1.13. Вычислить площадь части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсекаемой плоскостью $x + y = a$ и расположенной в первом октанте.

1.14. Вычислить площадь части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсекаемой поверхностями $y^2 = ax$, $x = a$.

1.15. Вычислить площадь части цилиндра $y = z^2$, вырезаемой поверхностями $y = 4x^2$, $x = 3$.

1.16. Вычислить площадь части цилиндра $y = z^2$, вырезаемой поверхностями $y = x^2$, $y = 3$.

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Перейдем к рассмотрению интегралов от функций трех переменных, называемых тройными. Эти интегралы, как и *двойные интегралы*, имеют широкое применение при решении различных геометрических, физических и технических задач. Поскольку между двойными и тройными интегралами существует почти полная аналогия, то далее будем обычно приводить лишь формулировки утверждений, так как доказательства этих утверждений легко получить, адаптируя доказательства аналогичных утверждений для двойного интеграла.

2.1. Задача о вычислении массы тела

Пусть дано некоторое материальное тело, занимающее в пространстве замкнутую область Q и имеющее неоднородное распределение массы по своему объему. Это распределение в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ характеризуется функцией плотности $\rho(x, y, z)$ трех переменных. Для нахождения массы m материального тела разобьем замкнутую область Q произвольным образом на n *частичных областей* Q_i , $i = \overline{1, n}$, объем каждой из которых обозначим ΔV_i . Выберем в каждой частичной области Q_i произвольную точку $(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \in Q_i$, $i = \overline{1, n}$, и приближенно примем, что в пределах Q_i плотность тела постоянна и равна $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда масса частичной области Q_i будет $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$, а для массы всего тела получим приближенное равенство

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \quad (2.1)$$

Ясно, что формула (2.1) тем точнее, чем меньше размеры каждой из частичных областей Q_i . За точное значение массы рассматриваемого тела можно принять предел, к которому стремится правая часть формулы (2.1) при стремлении к нулю наибольшего диаметра d из диаметров d_i частичных областей Q_i , $i = \overline{1, n}$, т.е.

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \quad (2.2)$$

Итак, задача вычисления массы материального тела привела к конструкции, очень похожей на двойной интеграл. Отличие лишь в том, что рассматривается замкнутая область не на плоскости, а в пространстве, а плотность зависит не от двух переменных, а от трех.

2.2. Определение тройного интеграла

Напомним вначале, что *тело* называют *кубируемым*, если точная верхняя грань V^* множества объемов всех включенных в это тело многогранников равна точной нижней грани V_* множества объемов всех многогранников, включающих в себя данное тело, причем число $V = V^* = V_*$ и называют *объемом тела*. Для кубируемости тела $Q \subset \mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие два многогранника Q_1 и Q_2 с объемами V_1 и V_2 соответственно, что $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ и $V_2 - V_1 < \varepsilon$ [VI]. Далее под *телом* будем понимать ограниченную замкнутую область в пространстве, а кубируемое тело будем также называть *кубируемой замкнутой областью*.

Будем говорить, что некоторое множество в \mathbb{R}^3 , в частности кривая или поверхность, является *множеством объема нуль*, если его можно заключить внутри многогранника сколь угодно малого объема. Используя это понятие, приведенный выше критерий кубируемости тела можно сформулировать

иначе: для кубирюемости ограниченной замкнутой области необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела объем нуль.

Важным классом кубирюемых замкнутых областей являются те, которые ограничены конечным числом гладких поверхностей. Множество точек, принадлежащих таким поверхностям, имеет объем нуль. Напомним, что поверхность называют гладкой, если в каждой ее точке определен единичный вектор нормали к поверхности, непрерывно меняющийся от точки к точке. Далее будем рассматривать только гладкие и кусочно гладкие поверхности. Отметим, что для объема пространственной замкнутой области (как и для площади плоской замкнутой области) справедливы свойства *неотрицательности, монотонности, аддитивности* и *инвариантности* (см. 1.2).

Пусть в некоторой кубирюемой замкнутой области Q в пространстве с прямоугольной системой координат $Oxyz$ определена ограниченная функция $f(x, y, z)$. Рассмотрим разбиение $T = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ замкнутой области Q на частичные области Q_i , $i = \overline{1, n}$, каждая из которых имеет объем $\Delta V_i > 0$ и диаметр d_i . Наибольший из диаметров d_i , как и в плоском случае, назовем *диаметром разбиения* T и обозначим $d(T)$. В каждой частичной области Q_i выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$. Значение функции $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ умножим на объем ΔV_i и составим интегральную сумму

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \quad (2.3)$$

функции $f(x, y, z)$. Таким образом, интегральная сумма определяется разбиением T и набором точек $(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ в частичных областях разбиения.

Функцию $f(x, y, z)$ называют *интегрируемой функцией* в кубирюемой замкнутой области $Q \in \mathbb{R}^3$, если существует конечный предел I ее интегральных сумм $S(T)$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $T = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ замкнутой области Q

с диаметром $d(T) < \delta(\varepsilon)$ и любого выбора точек $(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \in Q_i$ для соответствующей интегральной суммы $S(T)$ выполняется неравенство $|S(T) - I| < \varepsilon$. При этом конечный предел I интегральных сумм называют **тройным интегралом** от функции $f(x, y, z)$ по замкнутой области Q и обозначают

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \int_Q f(x, y, z) dV.$$

Итак, резюмируя, можно записать

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \quad (2.4)$$

Как и в плоском случае, замкнутую область Q будем называть **областью интегрирования**.

Задача вычисления массы тела (см. 2.1) показывает, что при $f(x, y, z) \geq 0$, $(x; y; z) \in Q$, тройной интеграл можно интерпретировать как массу неоднородного тела с плотностью $\rho = f(x, y, z)$.

Конечный предел интегральных сумм вида (2.3) может существовать только для ограниченных функций. Но, как и в случае функций одного и двух действительных переменных, не всякая ограниченная в замкнутой пространственной области функция интегрируема в ней. Чтобы сформулировать условия интегрируемости функций (условия существования тройного интеграла), как и в случае двойного интеграла, для функции $f(x, y, z)$ при заданном разбиении T кубической замкнутой области Q введем *нижнюю* и *верхнюю* суммы Дарбу

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta V_i, \quad \bar{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta V_i,$$

где m_i и M_i — точная нижняя и точная верхняя грани этой функции в частичной области Q_i , $i = \overline{1, n}$. Свойства сумм Дарбу, сформулированные для функции двух переменных (см. 1.3),

можно дословно перенести на случай трех переменных. Эти свойства приводят к следующему критерию существования тройного интеграла.

Теорема 2.1. Для того чтобы ограниченная в кублируемой замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$ функция $f(x, y, z)$ была интегрируемой в Q , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение $T = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ замкнутой области Q , что соответствующие этому разбиению суммы Дарбу будут удовлетворять условию $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$.

С помощью этого критерия можно установить некоторые классы интегрируемых функций.

Теорема 2.2. Всякая непрерывная в кублируемой замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$ функция $f(x, y, z)$ интегрируема в ней.

Теорема 2.3. Если функция $f(x, y, z)$ ограничена в кублируемой замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$ и непрерывна в Q всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль, то эта функция интегрируема в Q .

Теорема 2.4. Если ограниченные в кублируемой замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$ функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ отличаются друг от друга только на множестве объема нуль, то интегрируемость в Q одной из них равносильна интегрируемости другой, причем

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q g(x, y, z) dx dy dz. \quad \#$$

Функции трех переменных (как и функции одного и двух переменных), интегрируемые в замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$, обладают следующими свойствами.

1. Произведение интегрируемых в Q функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ является интегрируемым в Q .

2. Если функция $g(x, y, z)$ интегрируема в Q и удовлетворяет условию $|g(x, y, z)| \geq c > 0$, $(x, y, z) \in Q$, то функция $1/g(x, y, z)$ также интегрируема в Q .

2.3. Свойства тройного интеграла

Поскольку свойства *тройных интегралов* аналогичны свойствам *двойных интегралов* (см. 1.5), ограничимся лишь их перечислением.

1°. Если $Q \subset \mathbb{R}^3$ — кубируемая замкнутая область объема V , то

$$\int_Q dV = V. \quad (2.5)$$

2°. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в Q , то их линейная комбинация $\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$ с произвольными константами α и β также интегрируема в Q , причем

$$\begin{aligned} \int_Q (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dV = \\ = \alpha \int_Q f(x, y, z) dV + \beta \int_Q g(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Это свойство называют *линейностью тройного интеграла*. Отметим, что равенство (2.6) можно распространить на любое конечное число интегрируемых функций.

3°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в Q , то для любой кубируемой замкнутой подобласти $Q' \subset Q$ функция $f(x, y, z)$ интегрируема как в Q' , так и в $\overline{Q \setminus Q'}$.

4°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в замкнутых областях Q_1 и Q_2 , то она интегрируема и в их объединении $Q = Q_1 \cup Q_2$, причем если замкнутые области Q_1 и Q_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_{Q_1} f(x, y, z) dV + \int_{Q_2} f(x, y, z) dV. \quad (2.7)$$

Свойство 4° называют *аддитивностью тройного интеграла*. Это свойство, как и соответствующее свойство двойного интеграла, можно распространить на любое конечное число замкнутых областей.

5°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в Q и $f(x, y, z) \geq 0$, $(x; y; z) \in Q$, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV \geq 0. \quad (2.8)$$

6°. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в Q и $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, $(x; y; z) \in Q$, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV \leq \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.9)$$

7°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в Q , то функция $|f(x, y, z)|$ также интегрируема в Q , причем

$$\left| \int_Q f(x, y, z) dV \right| \leq \int_Q |f(x, y, z)| dV. \quad (2.10)$$

Свойство 7° часто называют *теоремой об оценке тройного интеграла по модулю*.

8°. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в Q и удовлетворяют в Q неравенствам $m \leq f(x, y, z) \leq M$ и $g(x, y, z) \geq 0$, то

$$m \int_Q g(x, y, z) dV \leq \int_Q f(x, y, z) g(x, y, z) dV \leq M \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.11)$$

Отметим, что если в сформулированном утверждении условие неотрицательности функции $g(x, y, z)$ заменить условием ее неположительности, то неравенства (2.11) модифицируются

следующим образом:

$$M \int_Q g(x, y, z) dV \leq \int_Q f(x, y, z) g(x, y, z) dV \leq m \int_Q g(x, y, z) dV.$$

Свойство 8° в частном случае, когда $g(x, y, z) \equiv 1$ в Q , приводит к неравенствам

$$mV \leq \int_Q f(x, y, z) dV \leq MV, \quad (2.12)$$

где V — объем замкнутой области Q . В таком виде свойство 8° иногда называют *теоремой об оценке тройного интеграла*.

9°. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в кубируемой замкнутой области Q , являющейся линейно связным множеством, а функция $g(x, y, z)$ интегрируема и знакопостоянна в Q , то существует такая точка $(x_0; y_0; z_0) \in Q$, что

$$\int_Q f(x, y, z) g(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.13)$$

Свойство 9° является аналогом соответствующего свойства двойного интеграла (см. теорему 1.9).

10°. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в кубируемой замкнутой области Q , являющейся линейно связным множеством, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) V, \quad (2.14)$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ — некоторая точка области Q .

Свойство 10°, аналогичное соответствующему свойству для двойного интеграла (см. теорему 1.8), называют *теоремой о среднем значении для тройного интеграла*, а значение

$f(x_0, y_0, z_0)$ в правой части равенства (2.14) — *средним значением функции $f(x, y, z)$ в Q* .

Равенству (2.14) можно придать физическое толкование, связав его с задачей о вычислении массы неоднородного тела (см. 1.2). Если тело, занимающее кубируемую замкнутую область $Q \subset \mathbb{R}^3$ с объемом V , имеет плотность $\rho = f(x, y, z)$, то его массу можно вычислить по формуле

$$m = \int_Q f(x, y, z) dV. \quad (2.15)$$

Предполагая, что плотность $\rho = f(x, y, z)$ является непрерывной в Q функцией, заключаем, что масса m тела равна массе однородного тела того же объема V с постоянной плотностью, равной значению $\rho_0 = f(x_0, y_0, z_0)$ плотности неоднородного тела в некоторой точке $(x_0; y_0; z_0)$ замкнутой области Q .

2.4. Вычисление тройного интеграла

Как и в случае *двойных интегралов*, основной прием при вычислении *тройных интегралов* заключается в их сведении к *повторному интегралу*, т.е. в переходе от интегрирования по пространственной замкнутой области к последовательному интегрированию по каждому переменному.

Рассмотрим замкнутую область $Q \subset \mathbb{R}^3$, которая снизу и сверху ограничена поверхностями $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$, $(x; y) \in D$, и боковой цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz . Здесь $D \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая область, являющаяся проекцией Q на плоскость xOy (рис. 2.1). Обобщая определение 1.2 на пространственный случай, всякую замкнутую область описанного вида назовем *x -цилиндрической областью* или *правильной областью* в направлении оси Oz . Любая вертикальная прямая, проходящая через внутреннюю точку такой области, пересекает ее границу в двух точках.

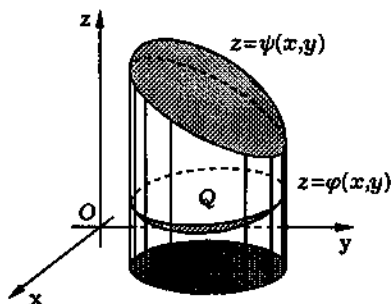


Рис. 2.1

Справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 1.11 для двойного интеграла.

Теорема 2.5. Если существует тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по замкнутой области

$$Q = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: (x; y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

а для каждой фиксированной точки $(x; y) \in D$ существует определенный интеграл

$$\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (2.16)$$

то существует повторный интеграл

$$\iint_D dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (2.17)$$

причем имеет место равенство

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad \# \quad (2.18)$$

Если для двойного интеграла в (2.17) выполнены условия теоремы 1.11, то его также можно представить в виде повторного, например взятого сначала по переменному y , а затем по переменному x . Тогда равенство (2.18) перейдет в равенство

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.19)$$

В случае, если область интегрирования Q является правильной в направлении оси Oy или Ox , то, поменяв в (2.18) местами переменные x, y, z , можно свести тройной интеграл к повторному с иным порядком интегрирования.

Замечание 2.1. Если пространственная область интегрирования Q не является правильной в направлении ни одной из координатных осей, то эту область следует разбить на части, которые являлись бы областями, правильными в направлении хотя бы одной из осей. Тогда к каждой из таких областей можно применить теорему 2.5, а затем в силу *аддитивности тройного интеграла* просуммировать полученные результаты.

Конкретизируем этот подход, ограничившись случаем, когда в повторных интегралах внутренний интеграл берется по переменному z . В алгоритме сведения тройного интеграла к повторному можно выделить следующие этапы.

1. Пространственную область интегрирования разобьем на такие части, чтобы каждая из них была правильной в направлении оси Oz . Для каждой из частей разбиения выполняем следующий шаг, предполагая, что эта часть обозначена через Q^* , а ее проекция на плоскость xOy — через D^* .

2. Зафиксируем точку $(x; y) \in D^*$ и проведем через эту точку вертикальную прямую, параллельную оси Oz . Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — аппликаты точек пересечения этой прямой с поверхностями, ограничивающими соответственно снизу и сверху рассматриваемую замкнутую область Q^* , аналогично замк-

нутой области Q , изображенной на рис. 2.1. Тогда значения $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будут соответственно нижним и верхним пределами интегрирования во внутреннем определенном интеграле повторного интеграла по переменному z .

3. После интегрирования по z получаем функцию двух переменных x и y . Двойной интеграл от этой функции по плоской замкнутой области D^* заменяем повторным (см. 1.7). #

Преобразование тройного интеграла в повторный вида (2.19) или аналогичный ему с другим порядком переменных называют *расстановкой пределов интегрирования* в тройном интеграле.

Пример 2.1. Расставим пределы интегрирования в тройном интеграле по замкнутой области

$$Q = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [0, h]\}.$$

В данном случае Q — прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям (рис. 2.2). Этот параллелепипед является замкнутой областью, правильной в направлении любой из координатных осей. Вертикальные прямые пересекают его нижнюю и верхнюю грани при значениях $z_1 = 0$ и $z_2 = h$. Поэтому в соответствии с (2.18) имеем

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_0^h f(x, y, z) dz,$$

где $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ — прямоугольник в плоскости xOy . Используя теорему 1.10, получаем

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_0^h f(x, y, z) dz.$$

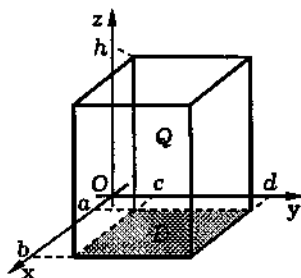


Рис. 2.2

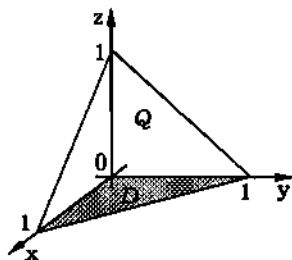


Рис. 2.3

Пример 2.2. Расставим пределы интегрирования в тройном интеграле по *тетраэдру**

$$Q = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

(рис. 2.3).

Замкнутая область Q является правильной в направлении любой координатной оси. Вертикальная прямая, проходящая через точку $(x; y)$ плоскости xOy , пересекает границу замкнутой области Q в точке $(x; y; 0)$ и точке $(x; y; z)$ пересечения с плоскостью $x + y + z = 1$, т.е. при $z = 1 - x - y$. Проекция Q на плоскость xOy есть треугольник

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1], x + y \leq 1\},$$

а прямые, параллельные оси Oy , пересекают его стороны при $y = 0$ и $y = 1 - x$. Следовательно, учитывая (2.19) и теорему 1.11, тройной интеграл можно представить в виде

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$$

*Под тетраэдром часто понимают произвольную треугольную пирамиду, не обязательно правильную.

Пример 2.3. В условиях примера 2.1 в качестве области интегрирования Q возьмем шар радиуса a с центром в начале координат (рис. 2.4). Область интегрирования Q можно задать неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Она является

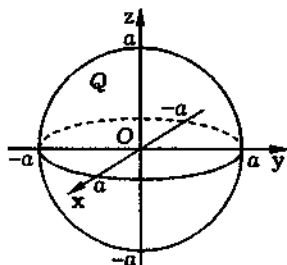


Рис. 2.4

правильной в направлении любой координатной оси. Вертикальные прямые пересекают ее в точках нижней полусферы при $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и в точках верхней полусферы при $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, поэтому в соответствии с (2.18) для тройного интеграла имеем

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_{-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} f(x, y, z) dz,$$

где D — круг $x^2 + y^2 \leq a^2$. Учитывая (2.19) и теорему 1.11, получаем

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} f(x, y, z) dz.$$

Пример 2.4. В условиях примера 2.1 в качестве области интегрирования рассмотрим полый полушар

$$Q = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

(рис. 2.5). Область интегрирования Q является правильной только в направлении оси Oz , причем проекцией Q на плоскость xOy является круг D , ограниченный окружностью, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Вертикальная прямая, параллельная оси

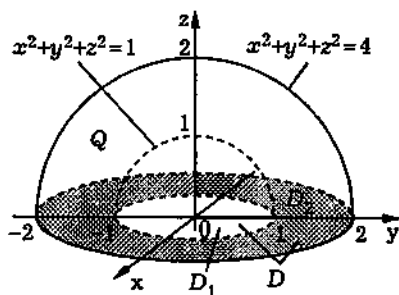


Рис. 2.5

Oz , пересекает полуферу, ограничивающую Q сверху, при $z_2 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $(x; y) \in D$. Если точка $(x; y)$ лежит в пределах круга $D_1 \subset D$, ограниченного окружностью, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, то проходящая через эту точку вертикальная прямая пересечет полуферу, ограничивающую Q снизу, при $z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x; y) \in D_1$. Если же точка $(x; y)$ принадлежит кольцу $D_2 = D \setminus D_1$ (см. рис. 2.5), ограниченному окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, то $z_1 = 0$.

Таким образом, для рассматриваемой области интегрирования Q тройной интеграл приходится представлять в виде двух повторных:

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} dx dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz + \\ + \iint_{D_2} dx dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

Плоская замкнутая область D_1 является правильной в направлении обеих координатных осей в плоскости xOy . Поэтому двойной интеграл по этой замкнутой области можно предста-

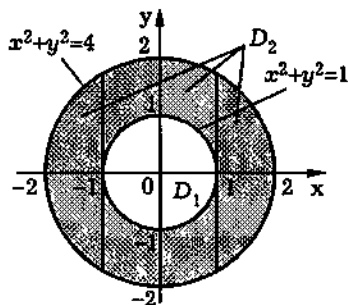


Рис. 2.6

вить, например, в виде

$$\iint_{D_1} dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy.$$

Замкнутая область D_2 (рис. 2.6) не является правильной. Поэтому разобьем ее прямыми $x = -1$ и $x = 1$ на четыре части и, учитывая замечание 1.10, запишем

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} dx dy &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} dy + \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy + \int_{1}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy. \end{aligned}$$

Окончательно, опуская для упрощения записи аргументы функции $f(x, y, z)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_Q f dV &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f dz + \\ &+ \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f dz + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f dz + \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f dz + \int_{1}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f dz. \end{aligned}$$

2.5. Замена переменных в тройном интеграле

Криволинейные координаты в пространстве. Пусть функции

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.20)$$

осуществляют отображение области $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ на область $Q^* \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что эти функции удовлетворяют условиям:

1) отображение, заданное функциями (2.20), является *биекцией* (т.е. взаимно однозначно);

2) функции (2.20) непрерывно дифференцируемы и в каждой точке $(\xi; \eta; \zeta) \in \Omega^*$ *якобиан* отображения (2.20)

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

В силу непрерывности частных производных якобиан отображения (2.20) является непрерывной функцией переменных ξ, η, ζ , а потому в области Ω^* сохраняет знак.

По *теореме об обратной функции* отображение, обратное к отображению (2.20), осуществляется непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z), \quad (2.21)$$

заданными в области Q^* . Якобиан $\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$ этого отображения в точке $(x; y; z)$ связан с якобианом $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ отображения (2.20) в точке $(\xi(x, y, z); \eta(x, y, z); \zeta(x, y, z))$ соотношением

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = 1,$$

а значит, отличен от нуля и сохраняет знак всюду в Q^* .

Как и в плоском случае, можно показать, что отображение (2.20), удовлетворяющее условиям 1 и 2, устанавливает взаимно однозначное соответствие между кублируемыми замкнутыми областями в Ω^* и Q^* , причем, если замкнутой области $\Omega \subset \Omega^*$ соответствует замкнутая область $Q \subset Q^*$, то внутренние точки Ω переходят во внутренние точки Q , а граничные точки — в граничные. Кроме того, это отображение любую гладкую (кусочно гладкую) поверхность в области Ω^* переводит в гладкую (кусочно гладкую) поверхность в Q^* и наоборот.

Рассмотрим в области Ω^* плоскость $\xi = \xi_0 = \text{const}$, параллельную координатной плоскости $\eta O_* \zeta$. В области Q^* ей соответствует некоторая (в общем случае криволинейная) поверхность, определяемая параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(\xi_0, \eta, \zeta), \\ y = y(\xi_0, \eta, \zeta), \\ z = z(\xi_0, \eta, \zeta), \end{cases} \quad (\xi_0; \eta; \zeta) \in \Omega^*. \quad (2.22)$$

Ясно, что плоскости $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ переходят при отображении (2.20) в аналогичные (2.22) поверхности. Эти *поверхности* называют *координатными*. Из взаимной однозначности отображения (2.20) следует, что через каждую точку $(x; y; z) \in Q^*$ проходит единственная тройка поверхностей, отвечающая заданным значениям ξ , η и ζ . Следовательно, эти значения можно рассматривать в качестве координат соответствующей точки $(x; y; z) \in Q^*$. Их называют *криволинейными координатами в пространственной области Q^** .

Элемент объема в криволинейных координатах. Предположим, что в пространственной области Q^* функциями (2.20) введены криволинейные координаты ξ , η и ζ . По-прежнему предполагаем, что функции (2.20) непрерывны и имеют непрерывные частные производные, а якобиан $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ отличен от нуля во всех точках $(\xi; \eta; \zeta) \in \Omega^*$. Рассмотрим в области Q^* прямоугольный параллелепипед с малыми ребрами $\Delta\xi$,

$\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, параллельными соответствующим координатным осям прямоугольной декартовой системы координат $O_*\xi\eta\zeta$ (рис. 2.7). Объем этого параллелепипеда равен $\Delta w = \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta$.

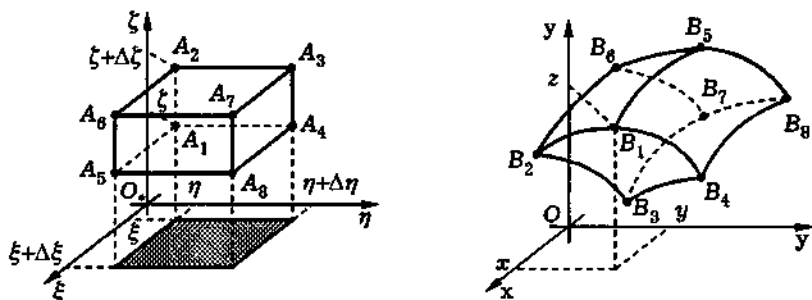


Рис. 2.7

При отображении (2.20) этот параллелепипед перейдет в некоторый в общем случае криволинейный шестигранник. При этом грани $A_1A_2A_3A_4$ параллелепипеда, лежащей в плоскости $\xi = \text{const}$, соответствует в области Q^* поверхность $B_1B_2B_3B_4$, грани $A_5A_6A_7A_8$, лежащей в плоскости $\xi + \Delta\xi$, — поверхность $B_5B_6B_7B_8$ и т.д. При малых размерах параллелепипеда в Q^* можно приближенно считать, что его образ, криволинейный шестигранник, также является параллелепипедом, построенным на векторах $\overrightarrow{B_1B_5}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_4}$. Вектор $\overrightarrow{B_1B_5}$ соответствует приращению $\Delta\xi$, и поэтому для его координат получаем

$$\overrightarrow{B_1B_5} \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta\xi; \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta\xi; \frac{\partial z}{\partial \xi} \Delta\xi \right\}.$$

Аналогично

$$\overrightarrow{B_1B_2} \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta\eta; \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta\eta; \frac{\partial z}{\partial \eta} \Delta\eta \right\},$$

$$\overrightarrow{B_1B_4} \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Delta\zeta; \frac{\partial y}{\partial \zeta} \Delta\zeta; \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Delta\zeta \right\}.$$

Объем ΔV параллелепипеда, построенного на трех этих векторах, равен абсолютной величине смешанного произведения трех

векторов [III], и его можно выразить с помощью определителя:

$$|\overrightarrow{B_1 B_5} \overrightarrow{B_1 B_2} \overrightarrow{B_1 B_4}| \approx \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi & \frac{\partial z}{\partial \xi} \Delta \xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta & \frac{\partial z}{\partial \eta} \Delta \eta \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Delta \zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \Delta \zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Delta \zeta \end{pmatrix} \right| =$$

$$= |J(\xi, \eta, \zeta)| \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)| \Delta w, \quad (2.23)$$

где $J(\xi, \eta, \zeta)$ — якобиан отображения (2.20).

Таким образом, отображение (2.20) переводит прямоугольный параллелепипед с объемом $\Delta w = \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta$ в криволинейный шестигранник в области Q^* , который приближенно можно заменить параллелепипедом с объемом ΔV , определяемым при помощи (2.23). Абсолютная величина якобиана равна отношению этих объемов и может рассматриваться как коэффициент растяжения *элемента объема* в окрестности точки $(\xi; \eta; \zeta) \in \Omega^*$ при отображении (2.20). Под элементом объема в криволинейных координатах понимают выражение (2.23). Используя разбиение области Ω^* плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на прямоугольные параллелепипеды с бесконечно малыми ребрами, можно аналогично случаю *двойного интеграла* выразить объем V_Q кубируемой замкнутой области $Q \subset Q^*$ *тройным интегралом*

$$V_Q = \iiint_{\Omega} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.24)$$

по замкнутой области Ω изменения переменных ξ, η, ζ , являющейся прообразом замкнутой области Q при отображении (2.20).

Замена переменных в тройном интеграле. Формулу замены переменных в тройном интеграле можно получить, рассуждая так же, как и в случае двойного интеграла (см. 1.9).

Теорема 2.6. Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение (2.20) области $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ на область $Q^* \subset \mathbb{R}^3$, якобиан $J(\xi, \eta, \zeta)$ которого в Ω^* отличен от нуля. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в кубической замкнутой области $Q \subset Q^*$ или же ограничена в Q и непрерывна в Q всюду, кроме некоторого множества объема нуль, то

$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где Ω — прообраз замкнутой области Q при отображении (2.20).

◀ Так как функция $f(x, y, z)$ непрерывна в Q , то тройной интеграл в левой части (2.25) существует и равен пределу интегральных сумм вида

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i. \quad (2.26)$$

В силу соответствия, которое отображение (2.20) устанавливает между Q и Ω , каждому разбиению $T = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ замкнутой области Q отвечает разбиение $T_* = \{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ замкнутой области Ω и обратно. Согласно (2.24), объемы ΔV_i частичных областей Q_i можно представить в виде

$$\Delta V_i = \iiint_{\Omega_i} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \quad i = \overline{1, n}.$$

Применив к этим интегралам теорему о среднем значении для тройного интеграла, получим

$$\Delta V_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)| \Delta w_i, \quad (\xi_i^*; \eta_i^*; \zeta_i^*) \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где Δw_i — объем частичной области Ω_i разбиения T_* .

В интегральной сумме (2.26) выбор точки $(x_i; y_i; z_i) \in Q_i$ произволен. Поэтому в качестве этой точки можно взять такую, которая имеет криволинейные координаты ξ_i^* , η_i^* , ζ_i^* . Тогда (2.26) примет вид

$$\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), z(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)) |J(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)| \Delta w_i. \quad (2.27)$$

Это выражение является интегральной суммой тройного интеграла в правой части (2.25), который существует в силу непрерывности подынтегральной функции. Отображение (2.20) непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно в $\Omega [V]$. Поэтому при стремлении к нулю диаметра d_* разбиения T_* к нулю будет стремиться и диаметр d соответствующего разбиения T . При этом предел интегральных сумм (2.26) будет равен интегралу в левой части (2.25), а предел сумм (2.27) — интегралу в правой части (2.25). Таким образом, эти интегралы являются пределами одних и тех же интегральных сумм и поэтому равны между собой, что доказывает равенство (2.25). ►

2.6. Цилиндрические и сферические координаты

Наиболее употребительными криволинейными координатами в пространстве являются *цилиндрические координаты* и *сферические координаты*.

Цилиндрические координаты. Цилиндрические координаты точки (рис. 2.8) связаны с прямоугольными декартовыми (при их стандартном взаимном расположении) соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad (2.28)$$

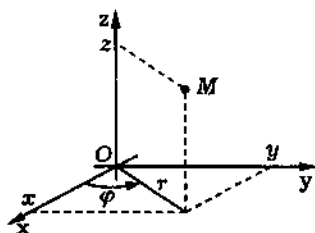


Рис. 2.8

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области

$$\Omega = \{(r; \varphi; z) \in \mathbb{R}^3: r \in [0, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\}$$

на $Q = \mathbb{R}^3$. Отметим, что прообразом каждой точки $M_0(0; 0; z_0)$ на оси Oz при отображении (2.28) является отрезок $r = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z = z_0$ в замкнутой области Ω . Таким образом, отображение (2.28) не является взаимно однозначным. Это не позволяет при вычислении интегралов напрямую использовать теорему 2.6. Однако, как и в случае полярных координат на плоскости, формула (2.25) остается верной в цилиндрических координатах.

Координатными поверхностями в цилиндрической системе координат будут:

1) цилиндрические поверхности $r = \text{const}$ с образующими, параллельными оси Oz , и направляющими в виде концентрических окружностей с центром на этой оси, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси Oz ;

2) полуплоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось Oz ;

3) плоскости $z = \text{const}$, перпендикулярные оси Oz .

Якобиан отображения (2.28) легко вычисляется:

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \quad (2.29)$$

При $r \neq 0$ якобиан сохраняет знак. В соответствии с (2.23) элемент объема в цилиндрических координатах равен $\Delta V = r \Delta r \Delta \varphi \Delta z$, или (при переходе к цилиндрическим координатам в тройном интеграле) $dV = r dr d\varphi dz$. Этот вывод можно также сделать исходя из геометрических соображений. Рассмотрим криволинейный шестигранник, ограниченный координатными поверхностями $r = \text{const}$ и $r + \Delta r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ и $\varphi + \Delta \varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$ и $z + \Delta z = \text{const}$ (рис. 2.9). С точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости объем ΔV этого шестигранника можно считать равным объему прямоугольного параллелепипеда с ребрами Δr , $r \Delta \varphi$ и Δz , т.е. $\Delta V = r \Delta r \Delta \varphi \Delta z$.

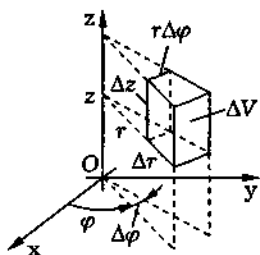
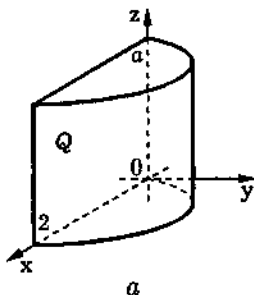


Рис. 2.9

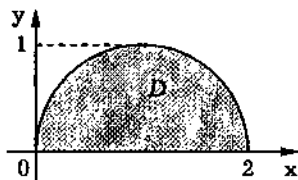
Пример 2.5. Расставим пределы интегрирования в тройном интеграле

$$I = \iiint_Q z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

по замкнутой области Q , ограниченной плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = a$ и поверхностью $y = \sqrt{2x - x^2}$ (рис. 2.10, а). Вычислим этот интеграл, переходя к цилиндрическим координатам.



а



б

Рис. 2.10

В прямоугольной системе координат тройной интеграл преобразуется в повторный следующим образом:

$$I = \iiint_Q z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz.$$

Замкнутая область D , являющаяся проекцией пространственной области интегрирования Q на координатную плоскость xOy , описывается с помощью неравенств $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$ (рис. 2.10, б). Эти неравенства можно заменить двумя неравенствами $y \geq 0$ и $x^2 + y^2 \leq 2x$. Переходя к полярным координатам в плоскости xOy , запишем последние два неравенства. В результате получим представление замкнутой области D :

$$D = \{(r; \varphi): 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}.$$

С помощью этого представления для рассматриваемого тройного интеграла получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr \int_0^a zr dz = \\ &= \frac{a^2}{6} \int_0^{\pi/2} r^3 \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

Пример 2.6. Вычислим объем V_Q тела Q , ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$ и расположенного внутри параболоида (рис. 2.11).

В прямоугольной системе координат объем пространственной замкнутой области равен тройному интегралу по этой замкнутой области от функции, тождественно равной единице,

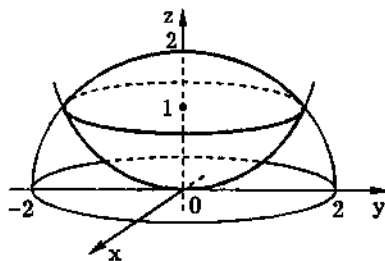


Рис. 2.11

т.е. объем тела Q равен

$$V_Q = \iiint_Q dx dy dz.$$

Поскольку рассматриваемое тело является z -цилиндрическим, то

$$V_Q = \iiint_Q dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz,$$

где D — проекция тела Q на плоскость xOy , $z_1(x,y)$ — функция входа, графиком которой является часть параболоида, а $z_2(x,y)$ — функция выхода, графиком которой является часть сферы.

В данном случае граница замкнутой области D совпадает с проекцией линии пересечения сферы и параболоида, а чтобы найти уравнение этой проекции, достаточно из уравнений двух поверхностей исключить переменное z . Из уравнения параболоида $x^2 + y^2 = 3z$ выражаем z и подставляем в уравнение сферы. Получаем

$$x^2 + y^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{9} = 4.$$

Это уравнение можно упростить, рассматривая его как квадратное относительно выражения $x^2 + y^2$. В результате получим уравнение границы в виде $x^2 + y^2 = 3$. Итак, замкнутая область D есть круг $x^2 + y^2 \leq 3$.

Вертикальная прямая, проходящая через точку $(x; y) \in D$, пересекает тело по отрезку, причем нижний конец этого отрезка (точка входа) расположен на параболоиде, а верхний конец (точка выхода) — на сфере. Используя уравнения этих поверхностей, находим

$$z_1(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2), \quad z_2(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Выражения для этих двух функций достаточно сложны, но они упрощаются при переходе к цилиндрической системе координат. В этом случае

$$z_1(r, \varphi) = \frac{r^2}{3}, \quad z_2(r, \varphi) = \sqrt{4 - r^2}.$$

Учитывая вид замкнутой области D и функций $z_1(r, \varphi)$, $z_2(r, \varphi)$, получаем

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} dz = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^3 \right) dr = -\frac{2\pi}{3} (4-r^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} r^4 \Big|_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(-1 + 8 - \frac{9}{4} \right) = \frac{19}{6} \pi. \end{aligned}$$

Сферические координаты. Сферические координаты r , φ и θ (рис. 2.12) связаны с декартовыми координатами x , y , z

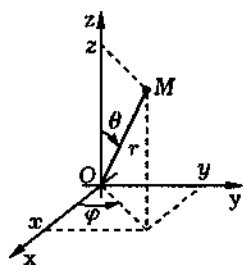


Рис. 2.12

(при стандартном взаимном расположении двух систем координат) соотношениями

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (2.30)$$

которые определяют отображение замкнутой области

$$\Omega = \{(r; \varphi; \theta) \in \mathbb{R}^3: r \in [0, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$$

в замкнутую область $Q = \mathbb{R}^3$. Это отображение непрерывно дифференцируемо, но в Ω не является взаимно однозначным. Тем не менее формула (2.25), как и в случае полярных и цилиндрических координат, остается верной.

Напомним, что сферические координаты имеют следующий геометрический смысл:

- 1) величина r есть длина радиус-вектора \overrightarrow{OM} точки M ;
- 2) величина φ есть угол между проекцией \overrightarrow{OM}_1 радиус-вектора \overrightarrow{OM} на плоскость xOy и осью Ox ;
- 3) величина θ есть угол между вектором \overrightarrow{OM} и осью Oz .

Сферическим координатам отвечают следующие семейства координатных поверхностей:

- 1) концентрические сферы $r = \text{const}$ с центром в точке O ;
- 2) полуплоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось Oz и ограниченные этой осью;
- 3) круговые полукоусы $\theta = \text{const}$ с вершиной в точке O , осью симметрии которых является ось Oz .

Отображение (2.30) взаимно однозначно всюду, кроме точек M , для которых $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, т.е. кроме точек, соответствующих точкам оси Oz . Действительно, точке $M_0(0; 0; z_0) \in Q$ в замкнутой области Ω соответствует отрезок $r = |z_0|$, $\theta = 0$,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, если $z_0 > 0$, или отрезок $r = |z_0|$, $\theta = \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, если $z_0 < 0$. Точке $(0; 0; 0) \in Q$ в замкнутой области Ω соответствует прямоугольник

$$D_0 = \{(r; \theta; \varphi): r = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}.$$

Якобиан отображения (2.30) равен

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

При $r \neq 0$ и $\theta \in (0, 2\pi)$ якобиан сохраняет знак. В соответствии с (2.23) элемент объема в сферических координатах равен $\Delta V = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \varphi \Delta \theta$, или (при переходе к сферическим координатам в тройном интеграле) $dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$. Покажем, что этот результат можно получить непосредственно из геометрических соображений. Координатными поверхностями $r = \text{const}$ и $r + \Delta r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ и $\theta + \Delta \theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ и $\varphi + \Delta \varphi = \text{const}$ выделим криволинейный шестигранник (рис. 2.13). С точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости объем ΔV этого шестигранника можно считать равным объему прямоугольного параллелепипеда с ребрами Δr , $r \Delta \theta$ и $r \sin \theta \Delta \varphi$, т.е. $\Delta V = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$.

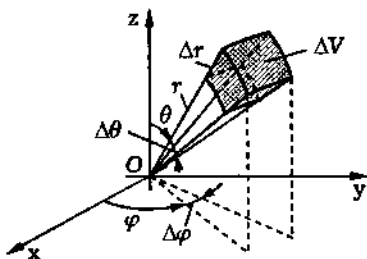


Рис. 2.13

Замечание 2.2. Напомним, что существует другой вариант сферической системы координат, в которой угол θ отсчи-

тывается не от оси Oz , а от координатной плоскости xOy [III]. В этом варианте областью изменения координаты θ является отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$, а якобиан отображения, связывающего сферические и декартовы координаты, равен $J(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta$.

Пример 2.7. В примере 2.4 при расстановке пределов интегрирования в тройном интеграле по полному полушару Q с использованием прямоугольной системы координат область интегрирования пришлось разделить на пять частей, так как она имеет сложную конфигурацию и не является правильной относительно какой-либо из координатных осей. Переход к сферическим координатам значительно упрощает задачу.

Напомним, что рассматриваемый полый полушар ограничен двумя сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскостью $z = 0$. Тело можно описать неравенствами, которые в сферической системе координат имеют простой вид: $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Поэтому тройной интеграл по замкнутой области Q в сферических координатах сведется лишь к одному повторному:

$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr. \end{aligned}$$

Пример 2.8. Вычислим объем V тела Q , ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

Тело можно описать с помощью неравенства $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^3 z$, которое в сферической системе координат является достаточно простым: $r^4 \leq a^3 r \cos \theta$, или $r^3 \leq a^3 \cos \theta$. Поскольку естественным ограничением переменного r является $r \geq 0$, то $\cos \theta \geq 0$, откуда $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Переменное φ вообще не входит в неравенство. Поэтому область изменения φ максимальная:

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Таким образом, рассматриваемое тело Q можно записать следующим образом:

$$Q = \left\{ (r; \theta; \varphi): \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/2], r \in [0, a\sqrt[3]{\cos\theta}] \right\}.$$

Учитывая такое представление, а также значение якобиана $J(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\theta$ для сферической системы координат, получаем

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta dr = \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{3} a^3. \quad \#$$

Отметим, что при вычислении тройных интегралов иногда удобно использовать *обобщенные сферические координаты*, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$x = ar \sin\theta \cos\varphi, \quad y = br \sin\theta \sin\varphi, \quad z = cr \cos\theta. \quad (2.31)$$

Легко проверить, что в таких координатах уравнение $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ трехосного эллипсоида с полуосями a, b, c приобретает вид $r = 1$, а элемент объема равен

$$dV = abc r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Пример 2.9. Найдем объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

В данном случае удобно использовать *обобщенные сферические координаты* r, φ, θ . Переходя к описанию тела неравенством и записывая неравенство в обобщенных сферических координатах, получим $r^4 \leq r^2 \sin^2\theta$, или, учитывая, что $\sin\theta \geq 0$, $r \leq \sin\theta$. В результате

$$V = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{2\pi}{3} abc \int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

2.7. Приложения двойных и тройных интегралов

Помимо задач, рассмотренных выше (см. 1.1, 2.1), двойные и тройные интегралы находят широкое применение при решении различных геометрических, физических и технических задач.

Если масса m_0 материальной точки характеризует свойство инерции при поступательном движении, то инерционные свойства этой точки при ее вращении относительно некоторой оси l количественно выражает момент инерции $J_l = m_0 r^2$ относительно оси l , где r — расстояние от точки до прямой l . При совмещении оси l с осью Oz прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ получим $J_l = J_{Oz} = m_0 r^2 = m_0(x^2 + y^2)$. Значения $J_{yOz} = m_0 x^2$ и $J_{xOz} = m_0 y^2$ называют моментами инерции относительно плоскостей yOz и xOz . Таким образом, $J_{Oz} = J_{yOz} + J_{xOz}$, т.е. момент инерции относительно координатной оси равен сумме моментов инерции относительно каждой координатной плоскости, содержащей эту ось.

Моменты инерции неоднородного тела, занимающего кубиремую замкнутую область $Q \subset \mathbb{R}^3$ и имеющего плотность $\rho(M) = \rho(x, y, z)$, относительно плоскостей yOz , xOz , xOy равны

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{yOz} = \int_Q x^2 \rho(x, y, z) dV, \\ J_{xOz} = \int_Q y^2 \rho(x, y, z) dV, \\ J_{xOy} = \int_Q z^2 \rho(x, y, z) dV. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Действительно, как и при вычислении массы такого тела (см. 2.1), разобьем замкнутую область Q произвольным образом на n частичных областей Q_i , $i = \overline{1, n}$, и в каждой из них

выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Если приближенно принять, что масса частичной области Q_i , имеющей объем ΔV_i , равна $\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ и сосредоточена в выбранной точке $M_i(x_i; y_i; z_i)$, то для моментов инерции такой материальной точки относительно плоскостей yOz , xOz , xOy получим

$$x_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad y_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad z_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Тогда моменты инерции всего тела приближенно будут равны

$$J_{yOz} \approx \sum_{i=1}^n x_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

$$J_{xOz} \approx \sum_{i=1}^n y_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

$$J_{xOy} \approx \sum_{i=1}^n z_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

В правых частях этих приближенных равенств стоят интегральные суммы для подынтегральных функций тройных интегралов (2.32). Если за точные значения моментов инерции принять пределы этих интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра d разбиения замкнутой области Q , то придем к (2.32).

Для моментов инерции тела относительно координатных осей, в технических приложениях называемых также *осевыми моментами инерции*, имеем

$$\begin{cases} J_{Oz} = \int_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV, \\ J_{Ox} = \int_Q (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ J_{Oy} = \int_Q (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dV. \end{cases} \quad (2.33)$$

Напомним, что вектором *статического момента* материальной точки массой m_0 относительно начала координат называют произведение $m_0 \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор этой точки. Проекции вектора статического момента материальной точки на координатные оси равны $m_0 x$, $m_0 y$, $m_0 z$ соответственно. Рассуждая аналогично, можно показать, что проекции вектора статического момента рассматриваемого тела на оси Ox , Oy и Oz равны

$$\begin{cases} K_x = \int_Q x \rho(x, y, z) dV, \\ K_y = \int_Q y \rho(x, y, z) dV, \\ K_z = \int_Q z \rho(x, y, z) dV. \end{cases} \quad (2.34)$$

Значения этих проекций иногда называют статическими моментами тела относительно плоскостей yOz , xOz и xOy .

Центром масс тела является точка C , обладающая следующим свойством: если в ней сосредоточить всю массу m тела, то векторы статического момента тела и полученной материальной точки будут равны. В соответствии с (2.15) масса тела с плотностью $\rho(x, y, z)$ составляет

$$m = \int_Q \rho(x, y, z) dV.$$

Поэтому координаты точки C можно выразить через проекции статического момента следующим образом:

$$x_C = \frac{K_x}{m}, \quad y_C = \frac{K_y}{m}, \quad z_C = \frac{K_z}{m}. \quad (2.35)$$

Отметим, что центр масс C тела, занимающего замкнутую область $Q \subset \mathbb{R}^3$, не обязательно является точкой внутри тела,

т.е. возможна ситуация, когда $C \notin Q$. Например, центр масс полого однородного шара находится в центре шара.

Пример 2.10. Найдем кинетическую энергию тела с плотностью $\rho(x, y, z)$, которое занимает кубируемую замкнутую область $Q \subset \mathbb{R}^3$ и вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω .

Разбивая замкнутую область Q произвольным образом на n частичных областей Q_i , $i = \overline{1, n}$, и выбирая в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, как и раньше, приближенно примем, что масса частичной области Q_i , имеющей объем ΔV_i , равна $\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ и сосредоточена в точке M_i . Скорость материальной точки M_i при ее вращении вокруг оси Oz равна $v_i = r_i\omega$, где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ — расстояние точки M_i до этой оси, а кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i(v_i^2)$. Поэтому для кинетической энергии W всего тела имеем

$$W \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

В правой части этого соотношения стоит интегральная сумма тройного интеграла, выражающего осевой момент инерции J_{Oz} . Если за точное значение кинетической энергии вращающегося тела принять предел правой части равенства при стремлении к нулю диаметра разбиения замкнутой области Q , то в итоге получим

$$W = \frac{\omega^2}{2} \int_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV = J_{Oz} \frac{\omega^2}{2}. \quad (2.36)$$

Пример 2.11. Покажем, что момент инерции тела относительно прямой l_C , проходящей через его центр масс, является наименьшим по сравнению с моментом инерции этого тела относительно любой другой прямой l_1 , параллельной первой. Для

этого достаточно рассмотреть моменты инерции относительно плоскостей и показать, что среди семейства параллельных плоскостей минимальный момент инерции соответствует той, которая проходит через центр масс (ее называют *центральной плоскостью* данного тела). При соответствующем выборе системы координат можно считать, что эти плоскости перпендикулярны оси Ox , так что их уравнениями будут $x = x_C$ и $x = x_1$, где $x_1 \neq x_C$. В соответствии с (2.32) для моментов инерции относительно этих плоскостей имеем

$$J_C = \int_Q (x - x_C)^2 \rho(x, y, z) dV, \quad J_1 = \int_Q (x - x_1)^2 \rho(x, y, z) dV.$$

Разность этих моментов инерции равна

$$\begin{aligned} J_1 - J_C &= \int_Q ((x - x_1)^2 - (x - x_C)^2) \rho(x, y, z) dV = \\ &= (x_1^2 - x_C^2) \int_Q \rho(x, y, z) dV - 2(x_1 - x_C) \int_Q x \rho(x, y, z) dV = \\ &= (x_1^2 - x_C^2)m - 2(x_1 - x_C)K_x, \end{aligned}$$

где K_x — проекция статического момента тела на ось Ox . Учитывая связь (2.35) проекций статического момента с координатами центра масс, находим, что

$$J_1 - J_C = (x_1^2 - x_C^2)m - 2(x_1 - x_C)x_C m = (x_1 - x_C)^2 m > 0.$$

Из приведенных выкладок можно сделать следующий вывод. Если для тела массой m момент инерции относительно некоторой прямой l_* , проходящей через его центр масс, равен J_* , то относительно параллельной ей прямой l^* , удаленной от центра масс на расстояние d , момент инерции равен $J^* = J_* + md^2$. Этот результат составляет содержание теоремы Гюйгенса — Штейнера*.

*Х. Гюйгенс (1629–1695) — голландский механик, физик и математик.
Я. Штейнер (1796–1863) — швейцарский математик.

Итак, кинетическая энергия тела, вращающегося с фиксированной угловой скоростью ω вокруг любой из параллельных осей, минимальна при вращении вокруг оси, проходящей через его центр масс. Любую ось, проходящую через центр масс тела, называют *центральной осью* этого тела.

Пример 2.12. Вычислим центробежную силу, действующую на вращающееся тело (см. пример 2.11). Как и раньше, разобьем тело Q произвольным образом на n частей Q_i , $i = \overline{1, n}$, и выберем в каждой из этих частей произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Приближенно будем считать, что масса каждой частичной области Q_i сосредоточена в точке M_i и равна $\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, где ΔV_i — объем частичной области Q_i . При вращении тела вокруг оси Oz с угловой скоростью ω на материальную точку M_i действует направленная перпендикулярно оси вращения элементарная центробежная сила, абсолютная величина которой равна $\Delta P_i = \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i(\omega^2 r_i)$. Проекции этой силы на оси Ox и Oy равны $\Delta P_{ix} = \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i(\omega^2 x_i)$ и $\Delta P_{iy} = \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i(\omega^2 y_i)$, а проекция на ось Oz равна нулю (рис. 2.14). Поэтому для проекций равнодействующей элементарных центробежных сил, действующей на все тело, получаем

$$P_x \approx \omega^2 \sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad P_y \approx \omega^2 \sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

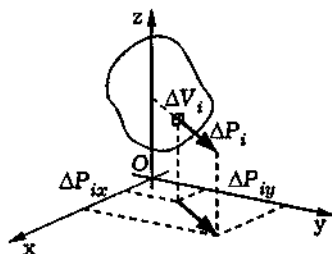


Рис. 2.14

В правых частях этих приближенных равенств стоят интегральные суммы для интегралов из (2.34). Принимая за точные значения проекций центробежной силы пределы этих правых частей при $d \rightarrow 0$, с учетом (2.34) и (2.35) получаем

$$\begin{cases} P_x = \omega^2 \int_Q x\rho(x, y, z) dV = \omega^2 K_x = mx_C\omega^2, \\ P_y = \omega^2 \int_Q y\rho(x, y, z) dV = \omega^2 K_y = my_C\omega^2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Отсюда видно, что на вращающееся тело действует такая же центробежная сила, как если бы вся его масса находилась в центре масс этого тела.

Элементарная центробежная сила создает относительно начала координат момент с проекциями $\Delta P_{iy}z_i$ и $\Delta P_{ix}z_i$ на оси Ox и Oy , а проекция этого момента на ось Oz вращения тела равна нулю. Поэтому проекции результирующего момента центробежной силы на оси Ox и Oy имеют вид

$$M_x \approx \omega^2 \sum_{i=1}^n y_i z_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad M_y \approx \omega^2 \sum_{i=1}^n x_i z_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Переходя в правых частях этих соотношений к пределу при $d \rightarrow 0$, получаем

$$M_x = \omega^2 \int_Q yz\rho(x, y, z) dV, \quad M_y = \omega^2 \int_Q xz\rho(x, y, z) dV. \quad (2.38)$$

Из (2.37) видно, что если ось вращения тела проходит через его центр масс, то результирующая центробежная сила равна нулю. Однако при этом проекции результирующего момента в общем случае будут отличны от нуля, т.е. вращающееся тело будет воздействовать на подшипники или иные виды опор, в которых закреплена его ось вращения. Чтобы такое

воздействие отсутствовало, необходимо и достаточно, чтобы ось вращения проходила через центр масс тела и равнялись нулю **центробежные моменты инерции**

$$J_{yz} = \int_Q yz\rho(x,y,z) dV, \quad J_{xz} = \int_Q xz\rho(x,y,z) dV. \quad (2.39)$$

В соответствии с (2.38) проекции результирующего момента пропорциональны центробежным моментам инерции. На этом основан принцип балансировки вращающихся тел.

Пример 2.13. Найдём кинетическую энергию W_l тела с плотностью $\rho(x,y,z)$, которое занимает кубируемую замкнутую область Q и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси l . Ось l проходит через начало координат и составляет с координатными осями углы α, β, γ (рис. 2.15).

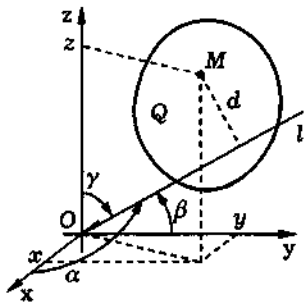


Рис. 2.15

Через произвольную точку $M(x;y;z) \in Q$ проведем плоскость перпендикулярно оси l . Расстояние от этой плоскости до начала координат равно $p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ [III]. Поэтому для квадрата расстояния от точки M до оси l получаем

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = \\ &= x^2(1 - \cos^2 \alpha) + y^2(1 - \cos^2 \beta) + z^2(1 - \cos^2 \gamma) - \\ &\quad - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Используя тождество $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, связывающее направляющие косинусы, находим

$$d^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta - \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

Так же, как и в примере 2.10, с учетом (2.33) и (2.39) найдем

$$W_l = \frac{\omega^2}{2} \int_Q d^2 \rho(x, y, z) dV = J_l \frac{\omega^2}{2}, \quad (2.40)$$

где

$$J_l = \int_Q d^2 \rho(x, y, z) dV = J_{Oz} \cos^2 \gamma + J_{Ox} \cos^2 \alpha + J_{Oy} \cos^2 \beta - \\ - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad \#$$

В случае однородного тела, имеющего постоянную плотность $\rho = \rho_0$, соотношения (2.32)–(2.34) принимают более простой вид. Если при этом тело является еще, например, z -цилиндрическим, ограниченным сверху поверхностью $z = f(x, y)$, то в формулах (2.32)–(2.34) можно перейти от тройных интегралов к двойным. Действительно, в этом случае для массы тела находим

$$m = \rho_0 \int_Q dV = \rho_0 \int_D dS \int_0^{f(x,y)} dz = \rho_0 \int_D f(x, y) dS,$$

где $D \in \mathbb{R}^2$ — основание z -цилиндрического тела, расположенное в плоскости xOy (см. рис. 1.1). Аналогично вместо (2.32)

имеем

$$\begin{cases} J_{yOz} = \rho_0 \int_D x^2 f(x, y) dS, \\ J_{xOz} = \rho_0 \int_D y^2 f(x, y) dS, \\ J_{xOy} = \frac{\rho_0}{3} \int_D f^3(x, y) dS, \end{cases} \quad (2.41)$$

а вместо (2.33) —

$$\begin{cases} K_x = \rho_0 \int_D x f(x, y) dS, \\ K_y = \rho_0 \int_D y f(x, y) dS, \\ K_z = \frac{\rho_0}{2} \int_D f^2(x, y) dS. \end{cases} \quad (2.42)$$

Если однородное z -цилиндрическое тело ограничено сверху и снизу поверхностями $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$, причем $g(x, y) \leq f(x, y)$, $(x, y) \in D$, то его масса равна

$$m = \rho_0 \int_Q dV = \rho_0 \int_D dS \int_{g(x, y)}^{f(x, y)} dz = \rho_0 \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dS.$$

Для моментов инерции и статических моментов такого тела несложно выписать соответствующие выражения, аналогичные (2.41) и (2.42). Отметим, что в специальном случае неоднородного z -цилиндрического тела, плотность $\rho = \rho(x, y)$ которого зависит лишь от координат x и y , его массу, моменты инерции и статические моменты можно также выразить при помощи

двойных интегралов по плоской замкнутой области D . Например, для массы m такого тела получим

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy \int_{g(x, y)}^{f(x, y)} dz = \int_D \rho(x, y) (f(x, y) - g(x, y)) dS,$$

а для момента инерции и статического момента относительно плоскости xOy —

$$J_{xOy} = \iint_D \rho(x, y) dx dy \int_{g(x, y)}^{f(x, y)} z^2 dz = \frac{1}{3} \int_D \rho(x, y) (f^3(x, y) - g^3(x, y)) dS,$$

$$K_z = \iint_D \rho(x, y) dx dy \int_{g(x, y)}^{f(x, y)} z dz = \frac{1}{2} \int_D \rho(x, y) (f^2(x, y) - g^2(x, y)) dS$$

соответственно.

Цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами его основания D , в технических приложениях принято называть *пластиной*, причем вместо высоты тела говорят о *толщине пластины*. Масса пластины с основанием D в плоскости xOy в соответствии с (1.4) равна

$$m^* = \int_D \rho_S(x, y) dS, \quad (2.43)$$

где $\rho_S(x, y)$ — функция, определяющая распределение массы в плоской замкнутой области D и называемая *поверхностной плотностью*. В общем случае для пластины переменной толщины $h(x, y)$ из неоднородного материала плотностью $\rho(x, y)$ поверхностная плотность равна $\rho_S(x, y) = \rho(x, y) h(x, y)$.

Из третьего равенства (2.41) следует, что для пластины постоянной толщины h_0 и постоянной поверхностной плотности

с основанием D в плоскости xOy момент инерции J_{xOy} относительно этой плоскости пропорционален h_0^3 . При малой толщине пластины по сравнению с диаметром замкнутой области D этот момент инерции оказывается существенно меньше моментов инерции J_{yOz} и J_{xOz} относительно двух других плоскостей. Последние два момента инерции мало отличаются от моментов инерции пластины относительно осей Oy и Ox соответственно. Поэтому для пластины с поверхностной плотностью $\rho_S(x, y)$ принимают

$$J_{Oy}^* = \int_D x^2 \rho_S(x, y) dS, \quad J_{Ox}^* = \int_D y^2 \rho_S(x, y) dS. \quad (2.44)$$

Сумму этих моментов инерции

$$J_O^* = \int_D (x^2 + y^2) \rho_S(x, y) dS \quad (2.45)$$

называют **полярным моментом инерции** пластины. Моменты инерции при $\rho_S(x, y) \equiv 1$, $(x, y) \in D$, называют **геометрическими моментами инерции** плоской замкнутой области D . В частности, они характеризуют сопротивление изгибу упругого стержня, поперечное сечение которого совпадает с замкнутой областью D .

Аналогично из (2.42) следует, что при малой толщине h_0 пластины по сравнению с диаметром замкнутой области D статический момент пластины относительно плоскости xOy , пропорциональный h_0^2 , существенно меньше статических моментов относительно двух других плоскостей. Поэтому считают, что центр масс пластины лежит в плоскости ее основания и имеет координаты

$$x_C^* = \frac{1}{m^*} \int_D x \rho_S(x, y) dS, \quad y_C^* = \frac{1}{m^*} \int_D y \rho_S(x, y) dS. \quad (2.46)$$

Пример 2.14. Вычислим геометрический момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x = 3$, $y = 3$, $x + y = 3$, относительно оси Oy (рис. 2.16).

Геометрический момент инерции относительно оси Oy может быть вычислен по первой формуле (2.44), причем в ней следует положить $\rho_S(x, y, z) \equiv 1$. Для заданной области D , имеющей форму треугольника, находим

$$J_{Oy} = \iint_D x^2 dS = \int_0^3 dx \int_{3-x}^3 x^2 dy = \int_0^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{81}{4}. \quad \#$$

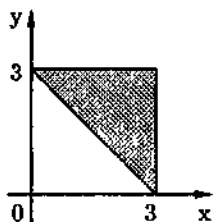


Рис. 2.16

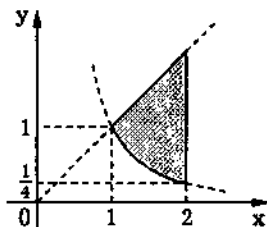


Рис. 2.17

Геометрическим центром масс плоской замкнутой области называют ее центр масс в предположении, что плотность соответствующей плоской фигуры постоянна и равна единице.

Пример 2.15. Найдем координаты геометрического центра масс замкнутой области D , ограниченной прямыми $x = 2$, $x = y$ и кривой $x^2 y = 1$ (рис. 2.17).

Координаты центра масс замкнутой области вычисляем по формулам (2.46), в которых $\rho_S(x, y, z) \equiv 1$, а m^* представляет собой площадь замкнутой области. Сначала находим площадь S замкнутой области D :

$$S = \iint_D dx dy = \int_1^2 dx \int_{1/x^2}^x dy = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = 1.$$

Затем переходим к вычислению координат центра масс. Для абсциссы x_C^* имеем

$$x_C^* = \frac{1}{S} \iint_D x \, dx \, dy = \int_1^2 dx \int_{1/x^2}^x x \, dy = \int_1^2 x \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{7 - 3 \ln 2}{3}.$$

Аналогичным образом вычисляем ординату центра масс:

$$y_C^* = \frac{1}{S} \iint_D y \, dx \, dy = \int_1^2 dx \int_{1/x^2}^x y \, dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^4} \right) dx = \frac{49}{48}.$$

Пример 2.16. Найдем силу, с которой материальная точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массой m_0 притягивается телом с плотностью $\rho(x, y, z)$, занимающим кубиреваемую замкнутую область $Q \subset \mathbb{R}^3$.

Как и в примере 2.10, замкнутую область Q разобьем на частичные области Q_i , $i = \overline{1, n}$, имеющие объемы ΔV_i , и приближенно примем, что масса частичной области Q_i равна $\Delta m_i = \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ и сосредоточена в некоторой точке $M_i(x_i; y_i; z_i) \in Q_i$. Материальная точка M_i притягивает точку M_0 с силой, которая по абсолютной величине равна

$$\Delta P_i = G \frac{m_0 \Delta m_i}{r_i^2},$$

где G — гравитационная постоянная (см. 7.1), а

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} \quad —$$

расстояние между точками M_i и M_0 . Эта сила направлена от M_0 к M_i и имеет на оси координат проекции

$$\Delta P_{ix} = \Delta P_i \frac{x_i - x_0}{r_i}, \quad \Delta P_{iy} = \Delta P_i \frac{y_i - y_0}{r_i}, \quad \Delta P_{iz} = \Delta P_i \frac{z_i - z_0}{r_i}.$$

Для проекций равнодействующей силы притяжения точки M_0 всем телом запишем

$$P_x \approx Gm_0 \sum_{i=1}^n \frac{\rho(x_i, y_i, z_i)(x_i - x_0)\Delta V_i}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$P_y \approx Gm_0 \sum_{i=1}^n \frac{\rho(x_i, y_i, z_i)(y_i - y_0)\Delta V_i}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$P_z \approx Gm_0 \sum_{i=1}^n \frac{\rho(x_i, y_i, z_i)(z_i - z_0)\Delta V_i}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2)^{3/2}}.$$

Если за точные значения проекций принять пределы интегральных сумм в правых частях этих соотношений при стремлении к нулю диаметра разбиения замкнутой области, то получим

$$\begin{cases} P_x = Gm_0 \int_Q \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0) dV}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}, \\ P_y = Gm_0 \int_Q \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0) dV}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}, \\ P_z = Gm_0 \int_Q \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0) dV}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.47)$$

Пусть материальную точку $M_0(0; 0; z_0)$ притягивает круглая пластина радиуса R с центром в начале координат и поверхностной плотностью $\rho_S = \text{const}$, лежащая в плоскости xOy . Масса пластины равна $m = \pi R^2 \rho_S$. Тогда в силу симметрии $P_x = P_y = 0$, а для проекции P_z , полагая в (2.47) $x_0 = y_0 = z = 0$ и заменяя $\rho(x, y, z) dV$ на $\rho_S dS$, придем к двойному интегралу по замкнутой области $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq R^2\}$:

$$P_z = -Gm_0 \rho_S z_0 \int_D \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Переходя к полярным координатам r , φ , в соответствии с теоремой 1.13 и примером 1.12 находим

$$P_z = -Gm_0\rho_S z_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = 2\pi G \frac{m_0\rho_S z_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \Big|_0^R =$$

$$= 2\pi G m_0\rho_S z_0 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} - \frac{1}{|z_0|} \right) = -2G \frac{m_0 m}{R^2} z_0 \frac{\sqrt{R^2 + z_0^2} - |z_0|}{|z_0| \sqrt{R^2 + z_0^2}}.$$

Если материальная точка M_0 удаляется от пластины, например, вдоль положительного направления оси Oz , так, что размеры пластины оказываются много меньше ее расстояния до материальной точки, то, переходя к пределу при $R/z_0 \rightarrow 0$, получим

$$P_z = -2Gm_0m \lim_{R/z_0 \rightarrow +0} \frac{\sqrt{R^2 + z_0^2} - |z_0|}{R^2 \sqrt{R^2 + z_0^2}} =$$

$$= -2Gm_0m \lim_{R/z_0 \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 + R^2/z_0^2} - 1}{R^2 \sqrt{1 + R^2/z_0^2}} = -G \frac{m_0 m}{z_0^2}.$$

В этом случае пластина притягивает точку M_0 так, как будто вся масса пластины сосредоточена в ее центре. Аналогичный результат получим, если точка M_0 будет удаляться вдоль отрицательного направления оси Oz .

При $z_0 \rightarrow 0$ существуют лишь односторонние пределы величины P_z . Действительно, при $z_0 \rightarrow +0$ имеем

$$P_z = -2G \frac{m_0 m}{R^2} \lim_{z_0 \rightarrow +0} z_0 \frac{\sqrt{R^2 + z_0^2} - |z_0|}{|z_0| \sqrt{R^2 + z_0^2}} = -2G \frac{m_0 m}{R^2},$$

а при $z_0 \rightarrow -0$ —

$$P_z = -2G \frac{m_0 m}{R^2} \lim_{z_0 \rightarrow -0} z_0 \frac{\sqrt{R^2 + z_0^2} - |z_0|}{|z_0| \sqrt{R^2 + z_0^2}} = 2G \frac{m_0 m}{R^2}.$$

Пределы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Но это не противоречит физическому смыслу задачи:

абсолютная величина силы притяжения стремится к одному и тому же значению при $z_0 \rightarrow 0$, но направление силы притяжения зависит от знака z_0 в окрестности предельной точки, так как сила направлена в сторону притягивающей пластины.

Пример 2.17. Найдем силу, с которой притягивает материальную точку $M_0(0; 0; z_0)$ массой m_0 цилиндрическое тело Q , имеющее плотность $\rho = \text{const}$ и ограниченное цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = \pm H$.

Так как тело Q симметрично относительно оси Oz , сила притяжения будет направлена вдоль этой оси, т.е. в (2.47) $P_x = P_y = 0$. Полагая в третьем равенстве (2.47) $x_0 = y_0 = 0$ и переходя к цилиндрическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} P_z &= Gm_0\rho \iiint_Q \frac{(z - z_0)r \, dr \, d\varphi \, dz}{(r^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi Gm_0\rho \int_{-H}^H (z - z_0) \, dz \int_0^R \frac{r \, dr}{(r^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \\ &= -2\pi Gm_0\rho \int_{-H}^H \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} \Big|_0^R (z - z_0) \, dz = \\ &= -2\pi Gm_0\rho \int_{-H}^H \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2}} \right) (z - z_0) \, dz = \\ &= -2\pi Gm_0\rho \left(\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2} - \sqrt{(z - z_0)^2} \right) \Big|_{-H}^H = \\ &= 2\pi Gm_0\rho \left(\sqrt{R^2 + (H + z_0)^2} - \sqrt{R^2 + (H - z_0)^2} + |H - z_0| - |H + z_0| \right). \end{aligned}$$

Проанализируем полученный результат. Ясно, что при $z_0 = 0$ в силу симметрии $P_z = 0$. При $z_0 = -H$ материальная точка находится в центре нижнего основания цилиндрического тела и $P_z^* = 2\pi Gm_0\rho(R + 2H - \sqrt{R^2 + 4H^2})$, а при $z_0 = H$ сила притяжения имеет ту же абсолютную величину, но направлена в

противоположную сторону. Производная функции, выражающей зависимость P_z от координаты z_0 притягиваемой точки, равна

$$\frac{dP_z}{dz_0} = 2\pi G m_0 \rho \left(\frac{H+z_0}{\sqrt{R^2+(H+z_0)^2}} + \frac{H-z_0}{\sqrt{R^2+(H-z_0)^2}} \right) - 2\pi G m_0 \rho \left(\frac{H-z_0}{|H-z_0|} + \frac{H+z_0}{|H+z_0|} \right).$$

Из этого равенства заключаем, что производная отрицательна при $z_0 \in (-H, H)$, терпит разрыв в точках $z_0 = \pm H$ и положительна при $|z_0| > H$ (рис. 2.18).

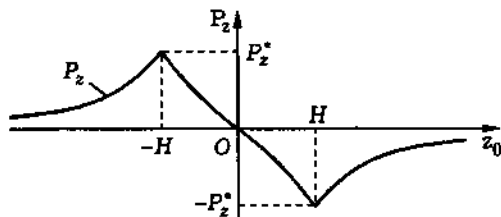


Рис. 2.18

Поскольку масса цилиндрического тела равна $m = 2\pi\rho R^2 H$, силу притяжения можно представить в виде

$$P_z = G \frac{m_0 m}{R^2 H} \left(\sqrt{R^2+(H+z_0)^2} - \sqrt{R^2+(H-z_0)^2} + |H-z_0| - |H+z_0| \right).$$

Сохраняя R и массу m тела постоянными, устремим H к нулю при условии $|z_0| > H$. В результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{H} \left(\sqrt{R^2+(H+z_0)^2} - \sqrt{R^2+(H-z_0)^2} + |H-z_0| - |H+z_0| \right) &= \\ &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\sqrt{R^2+z_0^2}}{H} \left(\sqrt{1 + \frac{H^2+2Hz_0}{R^2+z_0^2}} - \sqrt{1 + \frac{H^2-2Hz_0}{R^2+z_0^2}} \right) + \\ &+ \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|H-z_0| - |H+z_0|}{H} = 2 \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - 2 \frac{z_0}{|z_0|}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{H \rightarrow 0} P_z = 2G \frac{m_0 m}{R^2} z_0 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} - \frac{1}{|z_0|} \right),$$

т.е. приходим к результату, полученному в примере 2.16 для круглой пластины. Отметим, что предельная при $H \rightarrow 0$ сила притяжения P_z , как функция переменного z_0 , имеет в точке z_0 разрыв первого рода.

Пример 2.18. Цилиндрические координаты можно использовать и при вычислении силы, с которой материальная точка массой m_0 притягивается однородным шаром Q радиуса R и плотности $\rho = \text{const}$.

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы центр шара оказался в начале координат, а точка M_0 — на оси Oz с аппликатой $z_0 > 0$. Вследствие симметрии шара сила притяжения будет направлена вдоль оси Oz . Полагая в третьем равенстве (2.47) $x_0 = y_0 = 0$ и переходя к цилиндрическим координатам, находим

$$\begin{aligned} P_z &= Gm_0\rho \iiint_Q \frac{(z - z_0) r dr d\varphi dz}{(r^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi Gm_0\rho \int_{-R}^R (z - z_0) dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{r dr}{(r^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \\ &= -2\pi Gm_0\rho \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{R^2 - z^2}} (z - z_0) dz = \\ &= 2\pi Gm_0\rho \left(\int_{-R}^R \frac{(z - z_0) dz}{|z - z_0|} - \int_{-R}^R \frac{(z - z_0) dz}{\sqrt{R^2 - 2zz_0 + z_0^2}} \right) = \\ &= 2\pi Gm_0\rho (I_1 - I_2). \end{aligned}$$

Подынтегральной функцией первого интеграла I_1 в правой части равенства является $\text{sgn}(z - z_0)$. Поэтому этот интеграл при $z_0 \geq R$ равен $I_1 = -2R$. Если же $z_0 < R$, то

$$I_1 = - \int_{-R}^{z_0} dz + \int_{z_0}^R dz = -2z_0.$$

Для второго интеграла I_2 интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-R}^R \frac{(z - z_0) dz}{\sqrt{R^2 - 2zz_0 + z_0^2}} = \\ &= -\frac{z - z_0}{z_0} \sqrt{R^2 - 2zz_0 + z_0^2} \Big|_{-R}^R + \frac{1}{z_0} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2zz_0 + z_0^2} dz = \\ &= \frac{(z_0 - R)|z_0 - R| - (z_0 + R)|z_0 + R|}{z_0} - \frac{1}{3z_0^2} \sqrt{(R^2 - 2zz_0 + z_0^2)^3} \Big|_{-R}^R. \end{aligned}$$

Отсюда $I_2 = 2R^3/(3z_0^2) - 2R$ при $z_0 \geq R$ и $I_2 = -4z_0/3$ при $z_0 < R$. В итоге имеем

$$P_z = 2\pi G m_0 \rho (I_1 - I_2) = \begin{cases} -\frac{4\pi R^3 G m_0 \rho}{3z_0^2}, & z_0 \geq R; \\ -\frac{4\pi G m_0 \rho z_0}{3}, & z_0 < R. \end{cases}$$

Таким образом, однородный шар массой $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ притягивает материальную точку, находящуюся вне шара или на его границе ($z_0 \geq R$), так же, как и материальная точка массой m , находящаяся в центре шара. Если точка расположена внутри шара ($z_0 < R$), то сила притяжения точки шаром не зависит от радиуса R шара и по величине равна силе притяжения шаром радиуса z_0 , на поверхности которого точка находится. Это связано с тем, что полый однородный шар (т.е. тело, заключен-

ное между двумя концентрическими сферами) не притягивает материальную точку, находящуюся внутри его или на его внутренней поверхности.

Пример 2.19. Используем сферические координаты для вычисления силы, с которой материальная точка массой m_0 притягивается однородным шаром Q , имеющим радиус R и массу m .

Как и в примере 2.18, прямоугольную систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы центр шара попал в начало координат, а точка M_0 — на ось Oz с аппликатой $z_0 > 0$. Учитывая, что плотность шара постоянна и равна $\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$, и переходя в третьем равенстве (2.47) при $x_0 = y_0 = 0$ к сферическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} P_z &= 3G \frac{m_0 m}{4\pi R^3} \iiint_Q \frac{(r \cos \theta - z_0) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{(r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= 3G \frac{m_0 m}{2R^3} \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \frac{(r \cos \theta - z_0) \sin \theta \, d\theta}{(r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{3/2}}. \quad (2.48) \end{aligned}$$

Используем замену $\cos \theta = t$ (при этом $-\sin \theta \, d\theta = dt$) и проинтегрируем внутренний интеграл по частям:

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^\pi \frac{(r \cos \theta - z_0) \sin \theta \, d\theta}{(r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{3/2}} = - \int_1^{-1} \frac{(rt - z_0) \, dt}{(r^2 + z_0^2 - 2z_0 r t)^{3/2}} = \\ &= - \frac{rt - z_0}{rz_0 \sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0 r t}} \Big|_1^{-1} + \int_1^{-1} \frac{dt}{z_0 \sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0 r t}} = \\ &= \frac{z_0 + r}{rz_0 |z_0 + r|} - \frac{z_0 - r}{z_0 r |z_0 - r|} - \frac{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0 r t}}{z_0^2 r} \Big|_1^{-1} = \\ &= - \frac{z_0 + r}{z_0^2 |z_0 + r|} - \frac{z_0 - r}{z_0^2 |z_0 - r|}. \end{aligned}$$

Если точка M_0 находится вне шара, т.е. $z_0 \geq R \geq r$, то $I(r) = -\frac{2}{z_0^2}$. После подстановки значения интеграла $I(r)$ в (2.48) находим

$$P_z = -3G \frac{m_0 m}{R^3 z_0^2} \int_0^R r^2 dr = -G \frac{m_0 m}{z_0^2},$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 2.18. Если же точка M_0 расположена внутри шара (т.е. $z_0 < R$), то

$$\begin{aligned} \int_0^R r^2 I(r) dr &= \int_0^{z_0} r^2 I(r) dr + \int_{z_0}^R r^2 I(r) dr = \\ &= - \int_0^{z_0} \frac{2r^2}{z_0^2} dr = - \frac{2r^3}{3z_0^2} \Big|_0^{z_0} = -\frac{2}{3} z_0 \end{aligned}$$

и в соответствии с (2.48) $P_z = -G m_0 m z_0 / R^3$, что совпадает с результатом примера 2.18. #

Вопросы и задачи

2.1. Проинтегрировать функции

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \quad \text{и} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$$

по тетраэдру, ограниченному координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$ (см. рис. 2.3).

2.2. Найти координаты центра масс однородного тела, имеющего форму тетраэдра (см. задачу 2.1).

2.3. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = z$ по следующим областям интегрирования:

а) замкнутая область, ограниченная эллипсоидом $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ и плоскостью $z=0$ ($z > 0$);

б) замкнутая область, ограниченная конусом $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = h$, $h > 0$;

в) замкнутая область, ограниченная координатными плоскостями и плоскостями $y = h$ и $x + z = a$, $h, a > 0$ (призма).

2.4. Найти координаты центра масс однородных тел, занимающих замкнутые области, указанные в задаче 2.3.

2.5. Вычислить интеграл от функции

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

по области интегрирования D , которая ограничена поверхностью $f(x, y, z) = 1$. В области D найти среднее значение функции

$$g(x, y, z) = \exp \sqrt{f(x, y, z)}.$$

2.6. Найти среднее значение функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ в замкнутой области $f(x, y, z) \leq x + y + z$.

2.7. Проинтегрировать функцию $f(x, y, z) = z^2$ по замкнутой области, являющейся общей частью двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

2.8. Вычислить интеграл от функции $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ по замкнутой области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 - 2az = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $a > 0$, и расположенной внутри параболоида. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего эту замкнутую область.

2.9. Вычислить интеграл от функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ по замкнутой области, ограниченной поверхностями $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рассмотреть ту из областей внутри конуса, для которой $x \geq 0$). Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего эту замкнутую область.

2.10. Проинтегрировать функцию $f(x, y, z) = \frac{xy}{\sqrt{z}}$ по замкнутой области, расположенной в первом октанте и ограниченной

плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = c$, $c > 0$, и поверхностью $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего эту замкнутую область.

2.11. Представить с помощью двойных интегралов моменты инерции и статические моменты x -цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x = f(y, z)$ и $x = g(y, z)$, где $f(y, z)$ и $g(y, z)$ — непрерывные в плоской замкнутой области D функции, для которых $g(y, z) \leq f(y, z)$, $(y, z) \in D$.

2.12. Найти массу квадратной пластины D со стороной a , если поверхностная плотность $\rho_S(x, y)$ пластины в каждой точке $(x, y) \in D$ пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в его центре.

2.13. Найти моменты инерции относительно координатных осей однородного тела плотностью $\rho_0 = \text{const}$, ограниченного торовой поверхностью, полученной вращением относительно оси Oz окружности, заданной уравнением $(y - R)^2 + z^2 = a^2$, $0 < a < R$.

2.14. Два шара имеют одинаковые радиус R и массу m , причем плотность первого пропорциональна квадрату расстояния от центра шара, а плотность второго — кубу. Расстояние между центрами шаров составляет $L > 2R$. В каком положении должна находиться материальная точка, чтобы она не притягивалась системой этих двух шаров?

2.15. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = b^2$ и $x^2 = y^2 + z^2$, $0 < b < a$ (рассмотреть ту из областей внутри конуса, для которой $x \geq 0$).

2.16. Используя обобщенные сферические координаты, вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} + (z/c)^{2/3} = 1$, $a, b, c > 0$.

2.17. Используя обобщенные сферические координаты, найти координаты центра масс и моменты инерции относительно

координатных плоскостей однородного тела плотностью $\rho_0 = \text{const}$, занимающего замкнутую область в первом октанте и ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}, \quad a, b, c > 0.$$

2.18. Однородный цилиндрический брус Q имеет в основании плоскую фигуру D , а сверху ограничен произвольной плоскостью P . Доказать, что объем V этого бруса равен произведению площади S его основания на длину h перпендикуляра к основанию, проходящего через центр масс бруса до пересечения с плоскостью P .

2.19. Доказать, что если P — плоская фигура, а Ox и $O'x'$ — две параллельные оси в плоскости фигуры P , первая из которых проходит через центр масс фигуры P , а вторая находится от первой на расстоянии h , то моменты инерции I_x и $I_{x'}$ фигуры относительно этих осей связаны равенством $I_{x'} = I_x + mh^2$, где m — масса фигуры P .

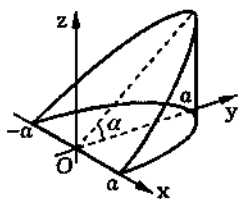


Рис. 2.19

2.20. Найти геометрический центр масс тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = y \operatorname{tg} \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 2.19).

2.21. Найти геометрический момент инерции кругового цилиндра радиуса a и высоты h относительно произвольной плоскости, проходящей через его ось симметрии.

2.22. Найти геометрический момент инерции эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.23. Найти геометрический центр масс кругового сектора радиуса R , имеющего центральный угол 2α .

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойные и тройные интегралы очень похожи, и их можно объединить в одной теории, распространив ее на случай линейного арифметического пространства произвольной размерности. Такая теория не только подчеркивает близость двойных и тройных интегралов, но и в некоторых случаях полезна при решении прикладных задач.

3.1. Мера Жордана

Пусть два набора чисел a_i и b_i удовлетворяют неравенствам $a_i \leq b_i$, $i = \overline{1, n}$. Множество

$$\begin{aligned} X &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, n} \} \end{aligned}$$

будем называть ***n*-мерным промежутком** или просто ***промежутком***. При $n = 1$ промежутком является отрезок числовой прямой, при $n = 2$ — прямоугольник на плоскости, а при $n = 3$ — прямоугольный параллелепипед в трехмерном пространстве.

Обобщая понятие длины отрезка, площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда, **меру *n*-мерного промежутка** $X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ определим как действительное число

$$\mu(X) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i). \quad (3.1)$$

Заметим, что если промежуток X является вырожденным, т.е. равенство $a_i = b_i$ верно по крайней мере для одного индекса i , то мера такого промежутка равна нулю.

Любое объединение конечного числа промежутков назовем *элементарным множеством*. Очевидно, что пересечение любого конечного числа промежутков является промежутком. Учитывая это, можно показать, что любое элементарное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ можно представить как объединение $E = \bigcup_{j=1}^k X_j$ конечного числа k промежутков X_j , никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Исходя из такого представления можно ввести для каждого элементарного множества его меру, суммируя меры составляющих его промежутков. А именно если $E = \bigcup_{j=1}^k X_j$, где никакие два промежутка X_{j_1} и X_{j_2} не имеют общих внутренних точек, то по определению

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^k \mu(X_j). \quad (3.2)$$

Можно показать, что мера элементарного множества не зависит от того, каким образом оно разбито на отдельные, пересекающиеся только по границе, промежутки.

Пустое множество \emptyset будем считать по определению элементарным множеством меры нуль, т.е. $\mu(\emptyset) = 0$.

Совокупность всех элементарных множеств в \mathbb{R}^n обозначим \mathcal{E} . Легко видеть, что объединение и пересечение элементарных множеств является элементарным множеством. Это значит, что множество \mathcal{E} замкнуто относительно операций объединения и пересечения множеств [I-5.4].

Мера элементарных множеств обладает следующими очевидными свойствами.

1°. *Неотрицательность меры*: $\mu(E) \geq 0$, $E \in \mathcal{E}$.

2°. *Монотонность меры*: если множества $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ связаны включением $E_1 \subset E_2$, то $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

3°. Для произвольных $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ верно равенство

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2). \quad (3.3)$$

Из свойства 3° вытекает *аддитивность меры* элементарных множеств: для любых элементарных множеств E_1 и E_2 , не имеющих общих внутренних точек,

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Понятие меры элементарного множества распространим на более широкий класс множеств, которые в общем случае уже не являются элементарными.

Для заданного ограниченного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим совокупность мер $M_e(D)$ всех элементарных множеств, включающих в себя множество D , и совокупность $M_i(D)$ всех элементарных множеств, включенных в D . Отметим, что числовое множество $M_e(D)$ ограничено снизу (например, числом 0), а числовое множество $M_i(D)$ ограничено сверху (например, мерой любого элементарного множества, включающего в себя D).

Точную нижнюю грань $\bar{\mu}(D)$ числового множества $M_e(D)$ называют *внешней мерой* ограниченного множества D , а точную верхнюю грань $\underline{\mu}(D)$ числового множества $M_i(D)$ — *внутренней мерой* множества D . Итак,

$$\bar{\mu}(D) = \inf_{\substack{E \in \mathcal{E} \\ E \supset D}} \mu(E), \quad \underline{\mu}(D) = \sup_{\substack{E \in \mathcal{E} \\ E \subset D}} \mu(E).$$

Отметим, что множество $M_e(D)$ не является пустым, так как ограниченное множество всегда можно заключить в промежуток достаточно больших размеров. Множество $M_i(D)$ также не пусто, так как всегда содержит пустое множество. Поэтому множество $M_i(D)$ не пусто и всегда содержит число 0.

Определение 3.1. Ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называют *измеримым (по Жордану)** множеством, если внутренняя и внешняя меры этого множества совпадают. При

*К. Жордан (1838–1922) — французский математик.

этом общее значение $\mu(D) = \underline{\mu}(D) = \overline{\mu}(D)$ внутренней и внешней мер называют *мерой (Жордана) множества D* .

Понятие измеримого множества и его меры при $n = 2$ соответствует понятиям *квадрируемой плоской фигуры* и *площади плоской фигуры*, а при $n = 3$ — понятиям *кубируемого тела* и *объема тела*. Отметим, что плоская фигура, ограниченная осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком неотрицательной интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ (криволинейная трапеция), является квадрируемой, а потому является измеримым по Жордану множеством. При этом мера этого множества равна значению интеграла от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Измеримым является и любое *z -цилиндрическое тело Q* , основание которого — плоская квадрируемая фигура D и которое сверху ограничено графиком неотрицательной непрерывной функции $f(x, y)$. Мера такого тела выражается двойным интегралом от функции $f(x, y)$ с областью интегрирования D .

Не всякое множество в \mathbb{R}^n измеримо. Например, неограниченные множества не являются измеримыми. Ниже мы приведем пример ограниченного неизмеримого множества.

Особо отметим измеримые множества, у которых мера равна нулю (*множества (жордановой) меры нуль*). Для ограниченного множества D меры нуль множество $M_i(D)$ состоит из единственного значения — нулевого. Следовательно, любое элементарное множество, включенное в D , есть объединение вырожденных промежутков, а потому не имеет внутренних точек. Это означает, что и само множество D не имеет внутренних точек. Очевидно, что верно и обратное утверждение: измеримое множество, не имеющее внутренних точек, является множеством меры нуль, так как в него нельзя включить элементарное множество положительной меры.

Замечание 3.1. Ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль, если $\overline{\mu}(D) = 0$. Учитывая это, множество меры нуль можно охарактеризовать следующим образом. Ограниченное множество D есть множество меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$

существует такое элементарное множество E , включающее в себя D , что $\mu(E) < \varepsilon$.

Обратим внимание на то, что все элементарные множества являются замкнутыми. Поэтому если $D \subset E$, где E — элементарное множество, то и $\bar{D} \subset E$. Из этого соображения делаем следующий вывод. Если множество D имеет меру нуль, то и его замыкание \bar{D} имеет меру нуль.

Пример 3.1. График $\Gamma(f)$ скалярной функции многих переменных $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывной на компакте D , является множеством в \mathbb{R}^{n+1} меры нуль. Действительно, выберем в \mathbb{R}^n некоторый промежуток $P = [-a, a] \times [-a, a] \times \dots \times [-a, a]$, включающий в себя компакт D . Так как функция $f(x)$ непрерывна на компакте D , то она и равномерно непрерывна на нем [I-5.9]. Следовательно, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число $\delta > 0$, что для любых точек $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/V$, где $V = 2(2a)^n$. Отрезок $[-a, a]$ разобьем на k частичных отрезков длины, меньшей δ/\sqrt{n} . Тогда промежуток P будет разбит на k^n частичных промежутков P_j , диаметр которых меньше δ . В каждом промежутке P_j выберем точку x_j и в \mathbb{R}^{n+1} рассмотрим набор промежутков

$$\tilde{P}_j = P_j \times \left[f(x_j) - \frac{\varepsilon}{V}, f(x_j) + \frac{\varepsilon}{V} \right], \quad j = \overline{1, k^n}. \quad (3.4)$$

Объединение промежутков P_j содержит в себе множество D . Поэтому любая точка $x \in D$ принадлежит хотя бы одному промежутку P_j , т.е. $x \in P_j$. В силу малых размеров промежутков P_j имеем $|x - x_j| < \delta$. Значит, согласно выбору числа δ , выполняется неравенство $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon/V$, т.е. точка $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ попадает в промежуток \tilde{P}_j . Таким образом,

$$\Gamma(f) \subset \bigcup_{j=1}^{k^n} \tilde{P}_j.$$

Остается вычислить суммарную меру промежутков \tilde{P}_j . С учетом представления (3.4) имеем

$$\sum_{j=1}^{k^n} \mu(\tilde{P}_j) = \frac{2\varepsilon}{V} \sum_{j=1}^{k^n} \mu(P_j) = \frac{2\varepsilon}{V} \mu(P) = \frac{2\varepsilon}{V} \cdot (2a)^n = \varepsilon.$$

Итак, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ мы построили элементарное множество меры ε , состоящее из промежутков \tilde{P}_j и включающее в себя множество $\Gamma(f)$. Согласно замечанию 3.1, множество $\Gamma(f)$ имеет меру нуль.

Лемма 3.1. Объединение конечного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль.

◀ Утверждение леммы достаточно доказать для случая объединения двух множеств. Пусть множества D_1 и D_2 в \mathbb{R}^n имеют меру нуль. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементарные множества E_1 и E_2 , что $D_1 \subset E_1$, $D_2 \subset E_2$ и $\mu(E_1) < \varepsilon/2$, $\mu(E_2) < \varepsilon/2$. Множество $E_1 \cup E_2$ является элементарным и включает в себя множество $D_1 \cup D_2$. При этом в силу равенства (3.3) имеем

$$\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, множество $D_1 \cup D_2$ можно включить в элементарное множество сколь угодно малой меры. Согласно замечанию 3.1, это множество имеет меру нуль. ▶

Лемма 3.2. Подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.

◀ Это утверждение вытекает из замечания 3.1, поскольку элементарное множество малой меры, включающее в себя множество $D \subset \mathbb{R}^n$, включает в себя и любое множество $D_1 \subset D$. ▶

Докажем важный критерий измеримости ограниченного n -мерного множества.

Теорема 3.1. Для того чтобы ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^n$ было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы его граница ∂D была множеством меры нуль.

◀ **Необходимость.** Пусть множество D измеримо, т.е. $\underline{\mu}(D) = \bar{\mu}(D) = \mu(D)$. Если $\mu(D) = 0$, то и замыкание \bar{D} множества D имеет меру нуль. В самом деле, множество D не имеет внутренних точек, так как иначе можно было бы внутри D выбрать промежуток (элементарное множество) положительной меры, а это противоречит определению множества меры нуль. Значит, $\partial D = \bar{D}$ и граница множества D имеет меру нуль.

Пусть $\mu(D) > 0$. Согласно свойствам точных верхней и нижней граней множества, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества E_1 и E_2 , что $E_1 \subset D \subset E_2$ и $\mu(E_1) > \mu(D) - \varepsilon/2$, $\mu(E_2) < \mu(D) + \varepsilon/2$.

Множество E_1 состоит из конечного числа промежутков, и мы можем считать, что все эти промежутки являются невырожденными, так как вырожденные промежутки можно не учитывать. Уменьшая незначительно размеры промежутков, составляющих множество E_1 , можно получить другое элементарное множество \tilde{E}_1 , которое целиком содержится во внутренней E_1 и тем более во внутренней D , а его мера отличается от меры E_1 настолько незначительно, что $\mu(\tilde{E}_1) > \mu(D) - \varepsilon/2$. В этом случае

$$\mu(E_2) - \mu(\tilde{E}_1) < \mu(D) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(D) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\tilde{E}_1 \subset E_2$, то в силу аддитивности меры $\mu(E_2 \setminus \tilde{E}_1) = \mu(E_2) - \mu(\tilde{E}_1) < \varepsilon$.

Поскольку множество \tilde{E}_1 содержится во внутренней множества D , то $\tilde{E}_1 \cap \partial D = \emptyset$. Множество E_2 как элементарное является замкнутым. Поэтому $\bar{D} \subset E_2$ и, следовательно, $\partial D \subset E_2$. Таким образом, $\partial D \subset (E_2 \setminus \tilde{E}_1)$. Подводя итог, заключаем, что множество ∂D содержится в элементарном множестве

$E_2 \setminus \text{int } \tilde{E}_1$, мера которого меньше ε . Согласно замечанию 3.1, множество ∂D имеет меру нуль.

Достаточность. Пусть граница ∂D ограниченного множества D является множеством меры нуль. В силу замечания 3.1 для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество E , которое включает в себя ∂D и имеет меру $\mu(E) < \varepsilon$. Рассмотрим множества $E_2 = D \cup E$ и $E_1 = \overline{D} \setminus E$. Можно показать, что множества E_1 и E_2 являются элементарными. Так как $E_1 \subset D \subset E_2$, то верны неравенства $\mu(E_1) \leq \underline{\mu}(D) \leq \overline{\mu}(D) \leq \mu(E_2)$. Отсюда следует, что $\overline{\mu}(D) - \underline{\mu}(D) \leq \mu(E_2) - \mu(E_1) = \mu(E) < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то отсюда вытекает, что $\overline{\mu}(D) - \underline{\mu}(D) = 0$, или $\underline{\mu}(D) = \overline{\mu}(D)$. ►

Пример 3.2. В \mathbb{R}^n рассмотрим множество D точек промежутка $P = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$, у которых все координаты рациональны. Это множество не является измеримым, так как граница множества D — весь промежуток P . Действительно, какую бы точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$ мы ни взяли, можно выбрать точку y с рациональными координатами, расположенную сколь угодно близко от точки x . Например, достаточно выбрать рациональное число $y_1 \in [0, 1]$, для которого $|x_1 - y_1| < \varepsilon$, рациональное число $y_2 \in [0, 1]$, для которого $|x_2 - y_2| < \varepsilon$, и т.д. Тогда для точки $y = (y_1, \dots, y_n) \in P$ имеем

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} < \varepsilon \sqrt{n}.$$

Но точно так же вблизи произвольной точки $x \in P$ можно выбрать точку, у которой хотя бы одна координата иррациональна и которая, следовательно, не принадлежит D . Это означает, что каждая точка промежутка P является граничной точкой множества D . Поскольку граница множества D — промежуток единичной меры, множество D не является измеримым. #

На меру измеримых множеств переносятся основные свойства меры элементарных множеств.

Свойство 3.1. Множество измеримых (по Жордану) множеств в \mathbb{R}^n замкнуто относительно теоретико-множественных операций. А именно если множества $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ измеримы, то множества $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2, D_2 \setminus D_1$ также измеримы.

◀ С учетом теоремы 3.1 достаточно доказать, что для измеримых множеств D_1 и D_2 множества $\partial(D_1 \cup D_2), \partial(D_1 \cap D_2)$ и $\partial(D_2 \setminus D_1)$ являются множествами меры нуль.

Отметим вытекающие из свойств теоретико-множественных операций включения

$$\partial(D_1 \cup D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2,$$

$$\partial(D_1 \cap D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2,$$

$$\partial(D_1 \setminus D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2.$$

Если множества D_1 и D_2 измеримы, то, согласно теореме 3.1, множества ∂D_1 и ∂D_2 имеют меру нуль. Но тогда множество $\partial D_1 \cup \partial D_2$ имеет меру нуль, а в силу отмеченных включений меру нуль имеют и границы множеств $\partial(D_1 \cup D_2), \partial(D_1 \cap D_2)$ и $\partial(D_2 \setminus D_1)$. Следовательно, эти множества измеримы. ▶

Свойство 3.2. Мера измеримых множеств обладает свойством монотонности: если множества $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ измеримы и $D_1 \subset D_2$, то $\mu(D_1) \leq \mu(D_2)$.

◀ Поскольку любое элементарное множество E , содержащее в себе множество D_2 , включает в себя и множество D_1 , то $\bar{\mu}(D_1) \leq \bar{\mu}(D_2)$. Множества D_1 и D_2 измеримы. Следовательно, $\mu(D_1) = \bar{\mu}(D_1) \leq \bar{\mu}(D_2) = \mu(D_2)$. ▶

Свойство 3.3. Для измеримых множеств $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) - \mu(D_1 \cap D_2). \quad (3.5)$$

◀ Заметим, что, согласно свойству 3.1, множества $D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2$ измеримы, так что слагаемые в равенстве (3.5) определены. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из определения 3.1 следует, что для множества D_1 найдутся такие элементарные множества E_1 и F_1 , что $E_1 \subset D_1 \subset F_1$ и

$$\mu(F_1) - \varepsilon < \mu(D_1) < \mu(E_1) + \varepsilon. \quad (3.6)$$

Аналогично для множества D_2 существуют такие элементарные множества E_2 и F_2 , что $E_2 \subset D_2 \subset F_2$ и

$$\mu(F_2) - \varepsilon < \mu(D_2) < \mu(E_2) + \varepsilon. \quad (3.7)$$

Сложив неравенства (3.6) и (3.7), получим

$$\mu(F_1) + \mu(F_2) - 2\varepsilon < \mu(D_1) + \mu(D_2) < \mu(E_1) + \mu(E_2) + 2\varepsilon. \quad (3.8)$$

В то же время

$$\begin{aligned} E_1 \cup E_2 &\subset D_1 \cup D_2 \subset F_1 \cup F_2, \\ E_1 \cap E_2 &\subset D_1 \cap D_2 \subset F_1 \cap F_2. \end{aligned}$$

Из этих включений и свойства монотонности меры следуют неравенства

$$\begin{aligned} \mu(E_1 \cup E_2) &\leq \mu(D_1 \cup D_2) \leq \mu(F_1 \cup F_2), \\ \mu(E_1 \cap E_2) &\leq \mu(D_1 \cap D_2) \leq \mu(F_1 \cap F_2). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, а затем используя свойства 1° и 3° меры элементарных множеств, получаем

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \mu(D_1 \cup D_2) + \mu(D_1 \cap D_2) \leq \mu(F_1) + \mu(F_2). \quad (3.9)$$

В итоге, учитывая (3.8), находим

$$\begin{aligned} \mu(D_1 \cup D_2) + \mu(D_1 \cap D_2) - 2\varepsilon &< \mu(D_1) + \mu(D_2) < \\ &< \mu(D_1 \cup D_2) + \mu(D_1 \cap D_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку ε может быть выбрано произвольно, то

$$\mu(D_1 \cup D_2) + \mu(D_1 \cap D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2),$$

а это равносильно равенству (3.5). ►

Мера пустого множества равна нулю. Учитывая это, заключаем, что если измеримые множества D_1 и D_2 не пересекаются, то

$$\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2), \quad (3.10)$$

т.е. мера Жордана обладает свойством аддитивности. Сформулированное утверждение верно и в более общем случае, когда измеримые множества не имеют общих внутренних точек. Действительно, тогда множество $D_1 \cap D_2$ не имеет внутренних точек и содержится в своей границе, совпадающей с замыканием множества. Так как множество $D_1 \cap D_2$ измеримо, то его граница, а следовательно, и само множество имеют меру нуль, т.е. $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$. С учетом этого равенства соотношение (3.5) сводится к равенству (3.10).

Свойство 3.4. Если множества $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ измеримы и $D_1 \subset D_2$, то

$$\mu(D_2 \setminus D_1) = \mu(D_2) - \mu(D_1). \quad (3.11)$$

◄ Множество $D_3 = D_2 \setminus D_1$ измеримо, и для него верны соотношения $D_3 \cup D_1 = D_2$, $D_3 \cap D_1 = \emptyset$. В силу равенства (3.5) имеем $\mu(D_2) = \mu(D_3) + \mu(D_1)$, что равносильно (3.11). ►

Свойство 3.5. Если множество $D \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то его внутренность $\text{int } D$ и его замыкание \bar{D} измеримы, причем

$$\mu(\text{int } D) = \mu(\bar{D}) = \mu(D).$$

◄ Если множество D измеримо, то его граница ∂D имеет меру нуль. Так как множество $\bar{D} \setminus D$ есть часть границы множества

D , т.е. включено в множество ∂D меры нуль, то $\mu(\overline{D} \setminus D) = 0$. Множество \overline{D} как объединение двух измеримых не пересекающихся множеств D и $\overline{D} \setminus D$ является измеримым, причем в силу свойства аддитивности меры

$$\mu(\overline{D}) = \mu(D) + \mu(\overline{D} \setminus D) = \mu(D).$$

Аналогично можно доказать, что множество $\text{int } D$ как разность двух измеримых множеств D и $D \setminus \partial D$ измеримо и имеет меру, совпадающую с $\mu(D)$. ►

Из сформулированного свойства и его доказательства можно сделать важный вывод: включение в множество части его границы или, наоборот, исключение из множества части его границы не влияет ни на условие измеримости множества, ни на значение его меры.

3.2. Интеграл по измеримому множеству

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Конечный набор $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ измеримых множеств D_j , включенных в D , назовем **разбиением множества D** , если никакие два из множеств D_j не имеют общих внутренних точек, а объединение всех множеств D_j есть D , т.е.

$$\text{int}(D_j \cap D_k) = \emptyset, \quad j, k = \overline{1, N}, \quad j \neq k;$$

$$D = \bigcup_{j=1}^N D_j.$$

Множества D_j , составляющие разбиение T , будем называть **частичными множествами разбиения T** .

Так как частичные множества D_1, \dots, D_N разбиения T не имеют общих внутренних точек, любое пересечение $D_j \cap D_k$, $j \neq k$, есть множество меры нуль. Учитывая это, на основании

свойства 3.3 меры Жордана заключаем, что

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^N D_j\right) = \sum_{j=1}^N \mu(D_j). \quad (3.12)$$

Разбиение $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D характеризуется диаметрами d_j частичных множеств D_j . Наибольший из них мы обозначим $d(T)$ и назовем *диаметром разбиения* T . Таким образом,

$$d(T) = \max_{j=1, \dots, N} d_j.$$

Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и на этом множестве задана скалярная функция многих переменных $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Возьмем некоторое разбиение $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D , в каждом частичном множестве D_j этого разбиения выберем какую-либо точку ξ_j и образуем сумму

$$S(T) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \mu(D_j). \quad (3.13)$$

Эту сумму называют *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей разбиению T и набору точек ξ_j , $j = \overline{1, n}$. Обратим внимание на то, что интегральная сумма данной функции на фиксированном множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ зависит не только от разбиения, но и от выбора точек $\xi_j \in D_j$ в частичных множествах D_j разбиения. Изменяя набор точек ξ_j , мы получим уже другую интегральную сумму.

Определение 3.2. Скалярную функцию многих переменных $f(x)$, определенную на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, называют *интегрируемой (по Риману) функцией* на D , если существует конечный предел I ее интегральных сумм $S(T)$ при $d(T) \rightarrow 0$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое

число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D с диаметром $d(T) < \delta(\varepsilon)$ и любого выбора точек $\xi_j \in D_j$ для соответствующей интегральной суммы $S(T)$ выполняется неравенство $|S(T) - I| < \varepsilon$. При этом конечный предел I интегральных сумм называют **кратным интегралом Римана** от функции $f(x)$ по множеству D и обозначают

$$I = \int_D f(x) dx = \overbrace{\int \dots \int}_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пример 3.3. Пусть функция $f(x)$ постоянна на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $f(x) \equiv A$. Тогда все интегральные суммы имеют одинаковое значение, не зависящее ни от разбиения множества D , ни от выбора точек в частичных множествах этого разбиения. Действительно, используя свойство аддитивности меры, для произвольного разбиения $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ и произвольного набора точек $\xi_j \in D_j$ получаем

$$S(T) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \mu(D_j) = A \sum_{j=1}^N \mu(D_j) = A \mu(D).$$

Очевидно, что в данном случае существует предел интегральных сумм, равный $A\mu(D)$. Это можно резюмировать следующим образом: функция, постоянная на измеримом множестве, интегрируема на этом множестве. Отметим, что такие функции позволяют выразить меру с помощью кратного интеграла:

$$\mu(D) = \int_D dx.$$

Пример 3.4. На множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ меры нуль интегрируемой является любая функция, причем кратный интеграл от

функции по множеству D равен нулю. Действительно, для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D имеем $\mu(D_j) = 0$, так как все частичные множества являются подмножествами меры нуль. Поэтому для функции $f(x)$, определенной на множестве D , при любом выборе точек $\xi_j \in D_j$ имеем

$$S(T) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j)\mu(D_j) = 0.$$

Теорема 3.2. Если действительная функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, являющемся замкнутой областью в \mathbb{R}^n , то она ограничена на этом множестве.

◀ Согласно определению интегрируемости функции, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D диаметра $d(T) < \delta$ и для любого набора точек $\xi_j \in D_j$, $j = \overline{1, N}$, имеем $|S(T) - I| < \varepsilon$, где I — значение кратного интеграла от функции $f(x)$ по множеству D . Разбиение T можно выбрать так, что составляющие его частичные множества D_j будут замкнутыми областями. Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 1.2. ▶

Ограниченность функции в замкнутой области — лишь необходимое условие ее интегрируемости, но вовсе не достаточное. Это видно уже на примере двойных интегралов (см. замечание 1.1).

Отметим, что если измеримое множество D не является замкнутой областью, то интегрируемая на D функция может быть и неограниченной. Например, если $D \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой объединение круга $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ и отрезка $1 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 = 0$, то функция $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^{-2}$ интегрируема на D , так как она интегрируема на компактном множестве $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ в силу своей непрерывности на нем и интегрируема на отрезке $1 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 = 0$, имеющем меру нуль. Однако эта функция не ограничена на D .

3.3. Суммы Дарбу и критерии интегрируемости функции

Чтобы выяснить, является ли данная функция интегрируемой на данном множестве, нужны какие-либо критерии интегрируемости (или критерии существования кратного интеграла). Для формулирования таких критериев мы построим теорию, аналогичную теории Дарбу для определенного интеграла, которая базируется на понятиях суммы Дарбу и интеграла Дарбу. Теория Дарбу для кратного интеграла мало отличается от ее аналога для определенного интеграла. Поэтому мы ограничимся лишь кратким ее изложением. Будем предполагать, что рассматриваемые функции удовлетворяют необходимому условию интегрируемости, т.е. являются ограниченными на рассматриваемом множестве.

Рассмотрим ограниченную скалярную функцию $f(x)$, определенную на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через \mathcal{T} множество всех разбиений множества D . Пусть $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ — некоторое фиксированное разбиение множества D . Обозначим через M_j и m_j точные верхнюю и нижнюю грани функции $f(x)$ на частичном множестве D_j , т.е.

$$M_j = \sup_{x \in D_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x \in D_j} f(x), \quad j = \overline{1, N}.$$

Отметим, что разность $\omega_j = M_j - m_j$ представляет собой колебание функции на множестве D_j .

Суммы

$$\overline{S}(T) = \sum_{j=1}^N M_j \mu(D_j) \quad \text{и} \quad \underline{S}(T) = \sum_{j=1}^N m_j \mu(D_j) \quad (3.14)$$

называют соответственно *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции $f(x)$ на множестве D , соответствующими разбиению T . Очевидно, что для данного разбиения T и любой интегральной суммы $S(T)$, отвечающей этому разбиению, верны

неравенства

$$\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \bar{S}(T). \quad (3.15)$$

Суммы Дарбу могут и не быть интегральными суммами, так как точные верхние грани M_j и точные нижние грани m_j функции на частичных множествах разбиения могут и не достигаться. Однако, как и в случае определенного интеграла, нижняя $\underline{S}(T)$ и верхняя $\bar{S}(T)$ суммы Дарбу являются соответственно точной нижней и точной верхней гранями множества интегральных сумм, отвечающих заданному разбиению T . В самом деле, рассмотрим, например, верхнюю сумму Дарбу $\bar{S}(T)$, отвечающую разбиению $T = \{D_1, \dots, D_N\}$. На каждом частичном множестве D_j можно выбрать такую точку ξ_j , что будет выполняться неравенство $f(\xi_j) > M_j - \frac{\varepsilon}{\mu(D)}$. Тогда для интегральной суммы, соответствующей разбиению T и выбранному набору точек ξ_j , имеем

$$\begin{aligned} S(T) &= \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \mu(D_j) > \sum_{j=1}^N \left(M_j - \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \right) \mu(D_j) = \\ &= \sum_{j=1}^N M_j \mu(D_j) - \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \sum_{j=1}^N \mu(D_j) = \bar{S}(T) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Полученное неравенство в сочетании с (3.15) и доказывает, что $\bar{S}(T)$ является точной верхней гранью множества всех интегральных сумм, отвечающих разбиению T .

Введем два понятия, относящиеся к разбиениям. Если два разбиения $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ и $T' = \{D'_1, \dots, D'_M\}$ измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что каждое частичное множество D_j разбиения T является либо элементом разбиения T' , либо объединением нескольких элементов T' , то разбиение T' называют *измельчением разбиения T* .

Для двух разбиений $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ и $T' = \{D'_1, \dots, D'_M\}$ измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ можно построить новое разбиение T'' , частичными множествами которого являются всевозможные непустые пересечения вида $D_j \cap D'_k$. Такое разбиение

называют *объединением разбиений* T и T' . Отметим, что разбиение T'' является измельчением и разбиения T , и разбиения T' .

Лемма 3.3. Если разбиение T' измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ является измельчением разбиения T этого же множества, то

$$\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T') \leq \bar{S}(T') \leq \bar{S}(T). \quad (3.16)$$

◀ Доказательство этого утверждения, по существу, не отличается от доказательства аналогичного утверждения для определенного интеграла. ▶

Лемма 3.4. Для любых двух разбиений T' и T'' измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ верны неравенства

$$\underline{S}(T') \leq \bar{S}(T''), \quad (3.17)$$

т.е. любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любую верхнюю сумму Дарбу.

◀ Пусть разбиение T есть объединение разбиений T' и T'' . Поскольку T является измельчением как разбиения T' , так и разбиения T'' , то в силу леммы 3.3 получаем

$$\underline{S}(T') \leq \underline{S}(T) \leq \bar{S}(T) \leq \bar{S}(T''). \quad \blacktriangleright$$

Согласно лемме 3.4, для измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ и ограниченной на D функции $f(x)$ множество нижних сумм Дарбу, соответствующих различным разбиениям множества D , ограничено сверху и потому имеет точную верхнюю грань

$$I_* = \sup_{T \in \mathcal{T}} \underline{S}(T).$$

Аналогично множество всех верхних сумм Дарбу, соответствующих всевозможным разбиениям множества D , ограничено снизу и имеет точную нижнюю грань

$$I^* = \inf_{T \in \mathcal{T}} \bar{S}(T). \quad (3.18)$$

Числа I_* и I^* называют соответственно *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* от функции $f(x)$ по множеству D . Эти числа связаны неравенством $I_* \leq I^*$, так как, согласно лемме 3.4, любая верхняя сумма Дарбу является верхней гранью множества нижних сумм Дарбу, а потому больше или равна точной верхней грани этого множества, т.е. числа I_* . Следовательно, число I_* является нижней гранью множества всех верхних сумм Дарбу и не превосходит точной нижней грани этого множества, т.е. числа I^* . Оказывается, что, как и в случае определенного интеграла, верхний и нижний интегралы Дарбу являются пределами верхних и нижних сумм Дарбу при стремлении к нулю диаметра разбиения. Доказательство этого составляет важнейшую часть теории Дарбу, причем в многомерном случае оно заметно сложнее, чем в одномерном. Но прежде чем формулировать и доказывать подобное утверждение, докажем одно вспомогательное утверждение.

Напомним, что *расстоянием между множествами* D и G в R^n называют точную нижнюю грань множества расстояний между парами точек $x \in D$ и $y \in G$, т.е.

$$\rho(D, G) = \inf_{\substack{x \in D \\ y \in G}} |x - y|.$$

Расстояние между множествами D и G может не достигаться. Например, расстояние между графиком функции $y = e^x$ и прямой $y = 0$ равно нулю, так как расстояние между точками $(x; e^x)$ и $(x; 0)$, расположенными соответственно на графике функции $y = e^x$ и на прямой $y = 0$, стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$. В то же время расстояние между точкой графика и точкой прямой не может быть равно нулю, так как два множества не пересекаются.

Тем не менее в отдельных случаях расстояние между множествами достигается на некоторой паре точек. В таких случаях отсутствие у двух множеств общих точек равносильно тому, что расстояние между этими множествами положительно.

Лемма 3.5. Если множество $D \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, а множество $G \subset \mathbb{R}^n$ компактно, причем $D \cap G = \emptyset$, то $\rho(D, G) > 0$.

◀ Выберем произвольную точку $y \in G$. Эта точка не принадлежит множеству D и не является предельной точкой D . Поэтому существует окрестность $U_y = \{z \in \mathbb{R}^n: |z - y| < \delta(y)\}$ этой точки, которая не содержит точек множества D . Совокупность открытых множеств $V_y = \{z \in G: |z - y| < \delta(y)/2\}$ образует покрытие компакта G . Согласно определению компакта, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие U_{y_1}, \dots, U_{y_m} . Положим

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta(y_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(y_m)}{2} \right\}$$

и докажем, что $\rho(D, G) \geq \delta/2$.

Произвольная точка $y \in G$ попадает в одно из множеств V_{y_k} . Это значит, что $|y - y_k| < \delta(y_k)/2$. Но тогда для любой точки x , для которой $|x - y| < \delta/2$, заключаем, что

$$|x - y_k| \leq |x - y| + |y - y_k| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta(y_k)}{2} \leq \delta(y_k),$$

т.е. точка x попадает в окрестность U_{y_k} точки y_k и, согласно выбору окрестности U_{y_k} , не принадлежит множеству D . Таким образом, для любой точки $x \in D$ выполняется неравенство $|x - y| \geq \delta/2$. Поскольку точка $y \in G$ выбиралась произвольно, можем утверждать, что $\rho(D, G) \geq \delta/2 > 0$. ▶

Теорема 3.3 (лемма Дарбу). Для произвольного измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ и любой ограниченной на D функции $f(x)$ верны равенства

$$I^* = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \overline{S}(T), \quad I_* = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \underline{S}(T), \quad (3.19)$$

где $d(T)$ — диаметр разбиения T множества D .

◀ Доказательство проведем для верхнего интеграла Дарбу I^* , доказательство утверждения для нижнего интеграла Дарбу

аналогично. Учитывая, что I^* — точная нижняя грань множества верхних сумм Дарбу и поэтому $I^* \leq \overline{S}(T)$ для любого разбиения T множества D , достаточно доказать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для произвольного разбиения T множества D с диаметром $d < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\overline{S}(T) - I^* < \varepsilon$.

Так как функция $f(x)$ ограничена на множестве D , то для некоторого числа $M > 0$ верно неравенство $|f(x)| \leq M$.

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку число I^* есть точная нижняя грань верхних сумм Дарбу, найдется такое разбиение $T' = \{D'_1, \dots, D'_N\}$, что

$$\overline{S}(T') < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.20)$$

Пусть Γ' — объединение границ частичных множеств D'_j , $j = \overline{1, N}$. Граница любого множества является замкнутым множеством. Следовательно, множество Γ' , как конечное объединение замкнутых множеств, является замкнутым множеством.

Так как все частичные множества D'_j измеримы, граница каждого из них в силу теоремы 3.1 является множеством меры нуль. Поэтому, согласно лемме 3.1, и объединение Γ' их границ будет также множеством меры нуль. В соответствии с определением меры существует элементарное множество E , которое включает в себя Γ' и имеет меру $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Увеличивая немного, если необходимо, составляющие E промежутки, мы можем считать, что Γ' целиком содержится во внутренней $\text{int } E$ множества E и при этом неравенство $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{4M}$ остается в силе.

В силу выбора элементарного множества E его граница ∂E не пересекается с множеством Γ' . Таким образом, все точки множества Γ' являются внутренними точками элементарного множества $E \in \mathcal{E}$, т.е. множество Γ' и граница ∂E — замкнутые множества, не имеющие общих точек ($\Gamma' \cap \partial E = \emptyset$). Отметим, что каждое из этих множеств ограничено, а потому компактно. Следовательно, согласно лемме 3.5, имеем $\delta = \rho(\Gamma', \partial E) > 0$.

Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D с диаметром $d < \delta/2$. Пусть T'' — объединение разбиений T и T' . Если частичное множество D_j разбиения T целиком содержится в одном из частичных множеств D'_k разбиения T' , то оно без изменений перейдет в разбиение T'' . Пусть множество D_j пересекается, например, с частичными множествами D'_k и D'_l разбиения T' . Выберем пару точек $x \in D_j \cap D'_k$ и $y \in D_j \cap D'_l$. На отрезке $[x, y]$ в \mathbb{R}^n , соединяющем точки x и y , т.е. на множестве

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n: z = x + t(y - x), t \in [0, 1]\},$$

есть точки как принадлежащие множеству D'_k , так и не принадлежащие ему. Значит, на этом отрезке есть точка x_* , принадлежащая границе $\partial D'_k$ множества D'_k и потому принадлежащая Γ' . При этом, учитывая, что $x \in D_j$ и $y \in D_j$, а диаметр d множества D_j меньше $\delta/2$, получаем

$$|x_* - x| = t_*|y - x| < |y - x| \leq \frac{\delta}{2},$$

где $t_* \in [0, 1]$ — значение параметра t на отрезке $[x, y]$ в \mathbb{R}^n , соответствующее точке x_* . Отсюда следует, что для произвольной точки $z \in D_j$ выполняются неравенства

$$|z - x_*| \leq |z - x| + |x_* - x| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

означающие, что множество D_j целиком попадает в элементарное множество E .

Итак, если частичное множество D_j разбиения T пересекается с несколькими частичными множествами разбиения T' , то $D_j \subset E$. Совокупность таких элементов разбиения T обозначим через T_1 . Совокупность остальных элементов разбиения T , которые являются и элементами разбиения T'' , обозначим через T_2 . В силу доказанного

$$\bigcup_{D_j \in T_1} D_j \subset E,$$

а в силу монотонности меры

$$\sum_{D_j \in T_1} \mu(D_j) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (3.21)$$

Пусть $D''_{j1}, \dots, D''_{j\beta_j}$ — элементы разбиения T'' , в совокупности составляющие частичное множество $D_j \in T_1$; $M''_{j1}, \dots, M''_{j\beta_j}$ — точные верхние грани функции $f(x)$ на этих множествах; M_j — точная верхняя грань $f(x)$ на D_j . Тогда с учетом свойства аддитивности меры получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\beta_j} M''_{jk} \mu(D''_{jk}) &= \sum_{k=1}^{\beta_j} M_j \mu(D''_{jk}) + \sum_{k=1}^{\beta_j} (M''_{jk} - M_j) \mu(D''_{jk}) \geq \\ &\geq M_j \sum_{k=1}^{\beta_j} \mu(D''_{jk}) - 2M \sum_{k=1}^{\beta_j} \mu(D''_{jk}) = M_j \mu(D_j) - 2M \mu(D_j). \end{aligned}$$

Суммирование по всем элементам $D_j \in T_1$ приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{D_j \in T_1} \sum_{k=1}^{\beta_j} M''_{jk} \mu(D''_{jk}) &\geq \sum_{D_j \in T_1} M_j \mu(D_j) - 2M \sum_{D_j \in T_1} \mu(D_j) > \\ &> \sum_{D_j \in T_1} M_j \mu(D_j) - 2M \mu(E) > \sum_{D_j \in T_1} M_j \mu(D_j) - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание, что элементы разбиений T и T'' , не учтенные в этих неравенствах (совокупность множеств из семейства T_2), одни и те же, получаем оценку

$$S(T'') > S(T) - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.22)$$

Разбиение T'' является измельчением разбиения T' . Следовательно, согласно лемме 3.3, имеем

$$S(T'') \leq S(T') < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате, учитывая неравенство (3.22), заключаем, что

$$S(T) < S(T'') + \frac{\varepsilon}{2} < I^* + \varepsilon.$$

Напомним, что T — произвольное разбиение, имеющее диаметр $d < \delta/2$. Итак, доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta' = \delta/2$, что $S(T) < I^* + \varepsilon$ для любого разбиения T , имеющего диаметр $d < \delta'$. ►

Теорема 3.4 (критерий Дарбу). Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ была интегрируема на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы совпадали нижний и верхний интегралы Дарбу, т.е. $I_* = I^*$.

◀ Доказательство опирается на лемму Дарбу и является повторением доказательства критерия Дарбу для определенного интеграла. ►

Следствие 3.1. Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ была интегрируема на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \omega_j \mu(D_j) = 0, \quad (3.23)$$

где ω_j — колебание функции $f(x)$ на частичном множестве D_j разбиения $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D .

◀ Согласно лемме Дарбу и равенствам $\omega_j = M_j - m_j$, $j = \overline{1, N}$, имеем

$$I^* - I_* = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \omega_j \mu(D_j).$$

Поэтому утверждение следствия эквивалентно критерию Дарбу. ►

Теорема 3.5 (критерий Римана). Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ была интегрируемой на D , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T множества D , что

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon. \quad (3.24)$$

◀ Доказательство этого утверждения является повторением доказательства критерия Римана для определенного интеграла. ▶

Критерий Римана, как и в случае определенного интеграла, часто называют *критерием существования кратного интеграла*. Критерию Римана можно придать другую формулировку, а именно: ограниченная на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ интегрируема на D тогда и только тогда, когда

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} \sum_{j=1}^N \omega_j \mu(D_j) = 0,$$

где $T = \{D_1, \dots, D_N\}$, а ω_j — колебание функции $f(x)$ на множестве D_j .

Теорема 3.6. Функция $f(x)$, непрерывная на измеримом компакте $D \subset \mathbb{R}^n$, интегрируема на этом компакте.

◀ Так как функция $f(x)$ непрерывна на компакте D , то она равномерно непрерывна на этом компакте [I-5.9]. Поэтому для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для любых точек x_1 и x_2 из D , для которых $|x_1 - x_2| < \delta$, верно неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(D)}$. Выберем произвольное разбиение $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D , для которого диаметр разбиения $d(T)$ меньше δ . Тогда диаметр каждого частичного множества D_j также будет меньше δ , а колебание ω_j функции на D_j будет меньше $\frac{\varepsilon}{\mu(D)}$. Для этого

разбиения получаем

$$\sum_{j=1}^N \omega_j \mu(D_j) < \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \sum_{j=1}^N \mu(D_j) = \varepsilon.$$

Согласно критерию Римана, функция $f(x)$ интегрируема на D . ►

Теорема 3.7. Если заданная на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ ограничена в D и непрерывна всюду в D , за исключением, возможно, множества меры нуль, то она интегрируема на D .

◀ Ограниченность функции $f(x)$ на множестве D означает выполнение неравенства $|f(x)| \leq M$ для некоторого числа $M > 0$. Доопределим функцию $f(x)$ в тех точках границы ∂D множества D , в которых она не определена, взяв в качестве значения число нуль. Такое расширение области определения породит дополнительные точки разрыва функции, но множество точек разрыва останется множеством меры нуль, так как оно расширяется за счет части границы множества D , а в силу измеримости D граница D и любая ее часть являются множествами меры нуль. Множество \bar{D} , будучи замкнутым и ограниченным (в силу измеримости D), является компактом. Итак, мы можем считать, что функция $f(x)$ задана на измеримом компакте \bar{D} , ограничена на нем, т.е. $|f(x)| \leq M$, $x \in \bar{D}$, и непрерывна в \bar{D} всюду, кроме некоторого множества $G \subset \bar{D}$ меры нуль.

Поскольку $\mu(G) = 0$, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество E , включающее в себя G , для которого $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Немного увеличивая, если необходимо, множество E , мы можем считать, что G целиком попадает во внутренность $\text{int } E$ множества E . Тогда множество $D' = \bar{D} \setminus \text{int } E$ является ограниченным и замкнутым, т.е. компактом, а функция $f(x)$ непрерывна на D' . Согласно теореме 3.6, функция $f(x)$ интегрируема на D' , а в силу критерия

Римана существует разбиение $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D' , для которого

$$\sum_{j=1}^N \omega_j \mu(D_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Добавив к разбиению T множество $D_{N+1} = E \cap \bar{D}'$, получим разбиение множества \bar{D} . Для этого разбиения имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N+1} \omega_j \mu(D_j) &= \sum_{j=1}^N \omega_j \mu(D_j) + \omega_{N+1} \mu(D_{N+1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \mu(D_{N+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \mu(E) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как число ε было выбрано произвольно, в силу критерия Римана заключаем, что функция $f(x)$ интегрируема на множестве \bar{D} , а значит, и на множестве D , поскольку эти два множества различаются множеством меры нуль. ►

3.4. Свойства интегрируемых функций и кратного интеграла

Перечислим основные свойства интегрируемых функций. Доказательства этих свойств можно получить, незначительно модифицировав доказательства соответствующих свойств определенного интеграла.

1°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, то и функция $f(x)g(x)$ интегрируема на множестве D .

2°. Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству $|f(x)| \geq c$, $x \in D$, где $c > 0$ — некоторая константа, то функция $1/f(x)$ интегрируема на множестве D .

3°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и, кроме того, функция $1/g(x)$ ограничена на D , то и функция $f(x)/g(x)$ интегрируема на множестве D .

4°. Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема и на любом его измеримом подмножестве $D' \subset D$.

5°. Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из измеримых множеств $D', D'' \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема и на их объединении $D = D' \cup D''$.

К числу основных свойств *кратного интеграла* можно отнести следующие его простейшие свойства. Эти свойства мы также не доказываем.

1*. Для произвольного измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_D dx = \mu(D) \quad (3.25)$$

(см. пример 3.3).

2*. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, то для любых действительных чисел α и β функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на D , причем

$$\int_D (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_D f(x) dx + \beta \int_D g(x) dx. \quad (3.26)$$

Свойство 2* называют *линейностью кратного интеграла*.

3*. Пусть $T = \{D_1, \dots, D_N\}$ — разбиение измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$. Для того чтобы определенная на D функция $f(x)$ была интегрируемой на D , необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируема на каждом из частичных множеств

D_j . При этом верно равенство

$$\int_D f(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{D_j} f(x) dx. \quad (3.27)$$

Свойство 3* называют **аддитивностью кратного интеграла**.

4*. Если функция $h(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и неотрицательна на этом множестве, то

$$\int_D f(x) dx \geq 0.$$

5*. Если интегрируемые на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$, то

$$\int_D f(x) dx \leq \int_D g(x) dx. \quad (3.28)$$

Свойство 5* называют **монотонностью кратного интеграла**.

6*. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, причем $m \leq f(x) \leq M$, $g(x) \geq 0$, $x \in D$, то

$$m \int_D g(x) dx \leq \int_D f(x)g(x) dx \leq M \int_D g(x) dx. \quad (3.29)$$

7*. Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и $m \leq f(x) \leq M$, $x \in D$, то

$$m\mu(D) \leq \int_D f(x) dx \leq M\mu(D). \quad (3.30)$$

Это свойство часто называют *теоремой об оценке кратного интеграла*.

8*. Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, то и функция $|f(x)|$ интегрируема на D , причем

$$\left| \int_D f(x) dx \right| \leq \int_D |f(x)| dx. \quad (3.31)$$

Это свойство называют *теоремой об оценке кратного интеграла по модулю*.

9*. Если функция $f(x)$ ограничена на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и принимает на нем ненулевые значения лишь на множестве $C \subset D$ меры нуль, то эта функция интегрируема на D , а кратный интеграл от $f(x)$ на D равен нулю.

10*. Пусть ограниченные на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают всюду в D , за исключением множества меры нуль. Если функция $f(x)$ интегрируема на D , то и функция $g(x)$ интегрируема на D , причем

$$\int_D f(x) dx = \int_D g(x) dx. \quad (3.32)$$

11*. Пусть измеримое множество $D \subset \mathbb{R}^n$ является линейно связным компактом, функция $f(x)$ непрерывна на D , а функция $g(x)$ интегрируема и знакопостоянна на D . Тогда существует такая точка $\xi \in D$, что

$$\int_D f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_D g(x) dx. \quad (3.33)$$

Это свойство является аналогом соответствующего свойства определенного интеграла, и его доказательство проводится по той же схеме, но с единственным отличием: вместо теоремы о промежуточном значении для функции действительного

переменного нужно использовать свойства функций многих переменных, непрерывных на компактах [V].

12*. Если функция $f(x)$ непрерывна на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, являющемся линейно связным компактом, то существует такая точка $\xi \in D$, что

$$\int_D f(x) dx = f(\xi)\mu(D). \quad (3.34)$$

Это свойство называют *теоремой о среднем значении для кратного интеграла*, а число $f(\xi)$ в равенстве (3.34) — *средним значением функции* на множестве D .

3.5. Сведение кратного интеграла к повторному

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на замкнутом измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют неравенству $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $x \in D$. Тогда множество $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ вида

$$G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{n+1}: x \in D, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (3.35)$$

назовем *правильным множеством* относительно $(n+1)$ -й координаты в \mathbb{R}^{n+1} . Аналогично вводится множество в \mathbb{R}^{n+1} , правильное относительно какой-либо другой координаты.

Лемма 3.6. Правильное множество в \mathbb{R}^{n+1} является измеримым.

◀ Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является правильным относительно $(n+1)$ -й координаты. Согласно теореме 3.1, достаточно доказать, что граница ∂G этого множества имеет меру нуль.

Множество ∂G представляет собой объединение графиков функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т.е. множеств

$$\Gamma(\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}: x \in D, y = \varphi(x)\},$$

$$\Gamma(\psi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}: x \in D, y = \psi(x)\},$$

а также множества C точек (x, y) , для которых $x \in \partial D$ и $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Как следует из примера 3.1, множества $\Gamma(\varphi)$ и $\Gamma(\psi)$ имеют меру нуль. Покажем, что множество C также имеет меру нуль. Тогда, согласно лемме 3.1, множество ∂G , как объединение трех множеств меры нуль, является множеством меры нуль.

Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ является измеримым. Следовательно, оно ограничено, а будучи по условию леммы замкнутым, является компактом. Поэтому непрерывные на D функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ограничены. Выберем число M так, что $|\varphi(x)| \leq M$ и $|\psi(x)| \leq M$. Из измеримости множества D также следует, что его граница ∂D имеет меру нуль (см. теорему 3.1). Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество $E \subset \mathbb{R}^n$, которое включает в себя ∂D и имеет меру $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Элементарное множество

$$E_C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, |y| \leq M\}$$

включает в себя множество C , так как при $(x, y) \in C$ имеем $x \in \partial D \subset D$ и

$$-M \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq M,$$

или $|y| \leq M$. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ состоит из промежутков P_1, P_2, \dots, P_k . Тогда множества $\tilde{P}_i = P_i \times [-M, M]$, $i = \overline{1, k}$, являются промежутками в \mathbb{R}^{n+1} , а объединение этих множеств совпадает с E_C . Предполагая, что промежутки P_i не имеют общих внутренних точек, заключаем, что промежутки \tilde{P}_i также не имеют общих внутренних точек и

$$\mu(E_C) = \sum_{i=1}^k \mu(\tilde{P}_i) = \sum_{i=1}^k 2M \mu(P_i) = 2M \mu(E).$$

Следовательно,

$$\mu(E_C) = 2M \mu(E) < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ мы имеем такое элементарное множество E_C , что $E_C \supset C$ и $\mu(E_C) < \varepsilon$. Согласно определению меры, множество C имеет меру нуль. ►

Теорема 3.8. Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является правильным относительно $(n+1)$ -й координаты и имеет вид (3.35), где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на D , а функция $f(x, y)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$) интегрируема на множестве G . Если для каждой фиксированной точки $x \in D$ функция $f(x, y)$ действительного переменного y интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, то функция

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

интегрируема на множестве D и имеет место равенство

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_D F(x) dx = \int_D dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (3.36)$$

◀ Покажем, что утверждение теоремы можно свести к более простому частному случаю, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постоянны, т.е. когда множество G точек (x, y) определяется соотношениями $x \in D$, $a \leq y \leq b$. Обозначим через a точную нижнюю грань функции $\varphi(x)$ на множестве D , через b точную верхнюю грань функции $\psi(x)$ на D и рассмотрим множество

$$\tilde{G} = D \times [a, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}: x \in D, a \leq y \leq b\}.$$

Очевидно, что множество \tilde{G} включает в себя множество G . Кроме того, множество \tilde{G} как правильное множество, согласно лемме 3.6, измеримо. Следовательно, измеримо и множество $\tilde{G} \setminus G$. Определим на множестве \tilde{G} функцию

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in G; \\ 0, & (x, y) \in \tilde{G} \setminus G. \end{cases}$$

В силу свойства аддитивности кратного интеграла функция $\tilde{f}(x, y)$ интегрируема на множестве \tilde{G} , так как она интегрируема на множествах G (по условию) и $\tilde{G} \setminus G$ (на этом множестве функция тождественно равна нулю). При этом

$$\int_{\tilde{G}} \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_G f(x, y) dx dy + \int_{\tilde{G} \setminus G} \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_G f(x, y) dx dy.$$

По условию теоремы при фиксированном $x \in D$ функция $f(x, y)$ интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$. Значит, при фиксированном x функция $\tilde{f}(x, y)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = F(x).$$

Таким образом, доказав утверждение теоремы для множества \tilde{G} , мы тем самым докажем это утверждение и для множества G .

Условие интегрируемости функции $\tilde{f}(x, y)$ на множестве \tilde{G} позволяет ограничиться разбиениями этого множества, имеющими специальный вид. Выберем произвольное разбиение $T' = \{D_1, \dots, D_N\}$ множества D и разбиение T'' отрезка $[a, b]$ некоторым набором точек y_0, y_1, \dots, y_m , где $y_0 = a$ и $y_m = b$. Эти два разбиения определяют разбиение $T = T' \times T''$ множества $\tilde{G} = D \times [a, b]$ на частичные множества

$$G_{jk} = D_j \times [y_{k-1}, y_k] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}: x \in D_j, y \in [y_{k-1}, y_k]\}, \\ j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Отметим, что все множества G_{jk} измеримы, так как являются правильными множествами. При этом $\mu(G_{jk}) = \mu(D_j)\Delta y_k$, где $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, а диаметр $d(T)$ разбиения T равен $d(T) = \sqrt{d(T')^2 + d(T'')^2}$, где $d(T')$ и $d(T'')$ — диаметры разбиений T' и T'' .

Нам необходимо доказать, что функция $F(x)$, которую можно представить в виде

$$F(x) = \int_a^b \tilde{f}(x, y) dy,$$

является интегрируемой на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, а ее интеграл удовлетворяет равенству

$$\int_D F(x) dx = \int_{\tilde{G}} \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

Для этого оценим верхнюю $\bar{S}_F(T')$ и нижнюю $\underline{S}_F(T')$ суммы Дарбу функции $F(x)$, соответствующие разбиению T' , через верхнюю $\bar{S}(T)$ и нижнюю $\underline{S}(T)$ суммы Дарбу функции $\tilde{f}(x, y)$, соответствующие разбиению T . Пусть m_j^F и M_j^F — точная нижняя и точная верхняя грани функции $F(x)$ на частичном множестве D_j , а m_{jk} и M_{jk} — точная нижняя и точная верхняя грани функции $\tilde{f}(x, y)$ на частичном множестве G_{jk} . Тогда для произвольного $x \in D_j$ в силу аддитивности определенного интеграла имеем

$$F(x) = \int_a^b \tilde{f}(x, y) dy = \sum_{k=1}^m \int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x, y) dy.$$

Согласно теореме об оценке для определенного интеграла,

$$\begin{aligned} m_{jk} \Delta y_k &= \inf_{\substack{x \in D_j \\ y \in [y_{k-1}, y_k]}} \tilde{f}(x, y) \Delta y_k \leq \inf_{y \in [y_{k-1}, y_k]} \tilde{f}(x, y) \Delta y_k \leq \\ &\leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x, y) dy \leq \sup_{y \in [y_{k-1}, y_k]} \tilde{f}(x, y) \Delta y_k \leq \\ &\leq \sup_{\substack{x \in D_j \\ y \in [y_{k-1}, y_k]}} \tilde{f}(x, y) \Delta y_k = M_{jk} \Delta y_k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^m m_{jk} \Delta y_k \leq F(x) \leq \sum_{k=1}^m M_{jk} \Delta y_k.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^m m_{jk} \Delta y_k \leq m_j^F \leq M_j^F \leq \sum_{k=1}^m M_{jk} \Delta y_k.$$

Умножая эти неравенства на $\mu(D_j)$ и суммируя по всем значениям индекса j , заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m m_{jk} \mu(G_{jk}) &\leq \sum_{j=1}^N m_j^F \mu(D_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N M_j^F \mu(D_j) \leq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m M_{jk} \mu(G_{jk}), \quad (3.37) \end{aligned}$$

так как $\mu(G_{ik}) = \mu(D_j) \Delta y_k$ для всех комбинаций входящих в равенство индексов. Неравенства (3.37) в соответствии с определениями нижней и верхней интегральных сумм означают, что

$$\underline{S}(T) \leq \underline{S}_F(T') \leq \overline{S}_F(T') \leq \overline{S}(T). \quad (3.38)$$

Поскольку функция $\tilde{f}(x, y)$ интегрируема на множестве \tilde{G} , то, согласно лемме 3.3 и теореме 3.4,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \underline{S}(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \overline{S}(T) = \int_{G_{[a, b]}} \tilde{f}(x, y) dy = I.$$

В соответствии с (3.38) имеем

$$\lim_{d(T') \rightarrow 0} \underline{S}_F(T') = \lim_{d(T') \rightarrow 0} \overline{S}_F(T') = I,$$

а это в силу теоремы 3.4 означает, что функция $F(x)$ интегрируема на множестве D , а ее кратный интеграл на этом множестве равен I , т.е. верно равенство (3.36). ►

Пример 3.5. Вычислим n -кратный интеграл

$$I = \int \cdots \int_D x_1 \cdots x_n dx_1 \cdots dx_n$$

по множеству D точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют соотношениям $x_i \in [0, 1]$, $i = \overline{1, n-1}$, $0 \leq x_n \leq x_1 \cdots x_{n-1}$.

Множество D является правильным множеством относительно n -й координаты. Обозначим

$$D_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}: x_i \in [0, 1], i = \overline{1, n-1}\}.$$

Тогда выполнены условия теоремы 3.8, и можно использовать равенство (3.36). В результате получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{D_{n-1}} \cdots \int x_1 \cdots x_{n-1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_0^{x_1 \cdots x_{n-1}} x_n dx_n = \\ &= \frac{1}{2} \int_{D_{n-1}} \cdots \int x_1^3 \cdots x_{n-1}^3 dx_1 \cdots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Множество D_{n-1} снова является правильным относительно $(n-1)$ -й координаты и может быть представлено в виде $D_{n-1} = D_{n-2} \times [0, 1]$, где

$$D_{n-2} = \{(x_1, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}: x_i \in [0, 1], i = \overline{1, n-2}\}.$$

Вновь можно применить теорему 3.8:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{D_{n-1}} \cdots \int x_1^3 \cdots x_{n-1}^3 dx_1 \cdots dx_{n-1} &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{D_{n-1}} \cdots \int x_1^3 \cdots x_{n-2}^3 dx_1 \cdots dx_{n-2} \int_0^1 x_{n-1}^3 dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл не зависит от переменных x_1, \dots, x_{n-1} . Поэтому повторный интеграл можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left(\int_{D_{n-1}} \dots \int x_1^3 \dots x_{n-2}^3 dx_1 \dots dx_{n-2} \right) \left(\int_0^1 x_{n-1}^3 dx_{n-1} \right),$$

т.е. как произведение кратного и определенного интегралов. При этом кратный интеграл по множеству D_{n-2} отличается от кратного интеграла по множеству D_{n-1} лишь количеством переменных. Повторяя процедуру „расщепления“ кратного интеграла, приходим к его представлению в виде произведения $n-1$ идентичных определенных интегралов:

$$I = \frac{1}{2} \int_{D_{n-1}} \dots \int x_1^3 \dots x_{n-1}^3 dx_1 \dots dx_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x_1^3 dx_1 \right)^{n-1}.$$

Это представление приводит к ответу

$$I = \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

3.6. Замена переменных в кратном интеграле

Пусть в области $D_q \subset \mathbb{R}^n$ задана функция многих переменных (отображение) $\Psi: D_q \rightarrow D_x \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая двум условиям:

- 1) функция Ψ осуществляет биективное отображение области D_q на область D_x ;
- 2) функция Ψ непрерывно дифференцируема, причем в каждой точке $q \in D_q$ ее Якобиан $\det \Psi'(q)$ отличен от нуля.

В силу сформулированных условий функция Ψ имеет обратную функцию Ψ^{-1} , осуществляющую отображение области D_x взаимно однозначно на область D_q . Согласно *теореме об обратной функции*, обратная функция Ψ^{-1} является непрерывно диф-

ференцируемой, а ее якобиан $\det(\Psi^{-1}(x))'$ в произвольной точке $x \in D_x$ связан с якобианом функции Ψ в точке $q = \Psi^{-1}(x)$ равенством

$$\det(\Psi^{-1}(x))' = (\det \Psi'(q))^{-1}.$$

В частности, якобиан $\det(\Psi^{-1}(x))'$ не равен нулю в любой точке $x \in D_x$.

Функцию Ψ можно рассматривать как связь переменных q_1, \dots, q_n , соответствующих координатам точки $q \in D_q$, с переменными x_1, \dots, x_n , соответствующими координатам точки $x \in D_x$. Эта связь задается уравнениями

$$x_i = \psi_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.39)$$

где ψ_1, \dots, ψ_n — координатные функции векторной функции Ψ . Переход от переменных x_1, \dots, x_n с помощью формул (3.39) к переменным q_1, \dots, q_n будем называть *заменой переменных*. При этом области D_x и D_q естественно назвать областями изменения соответствующих переменных. В дальнейшем под заменой переменных мы будем понимать не только переход от одних переменных к другим, но и функцию Ψ , удовлетворяющую условиям 1 и 2, которая обеспечивает указанный переход.

Введенное выше понятие замены переменных наталкивает на мысль, что в кратном интеграле от некоторой функции $f(x)$ по множеству $G_x \subset D_x$ можно перейти от переменных x к переменным q и тем самым к кратному интегралу по множеству $G_q = \Psi^{-1}(G_x)$, являющемуся прообразом множества G_x при отображении Ψ . Такой переход должен осуществляться согласно формуле

$$\int_{G_x} f(x) dx = \int_{G_q} F(q) dq, \quad (3.40)$$

в которой функция $F(q)$ некоторым образом соответствует функции $f(x)$. Высказанное предположение косвенно подтверждается правилом замены переменного в определенном интеграле.

Но прежде чем конкретизировать формулу (3.40), т.е. выяснить конкретный вид функции $F(q)$, следует рассмотреть вопрос о том, как замена переменных влияет на условие измеримости множества.

Лемма 3.7. Пусть задана замена переменных $\Psi: D_q \rightarrow D_x$, где D_q и D_x — области в \mathbb{R}^n . Если $C_q \subset D_q$ — замкнутое множество меры нуль, то его образ $C_x = \Psi(C_q) \subset D_x$ при отображении Ψ является множеством меры нуль.

◀ Пусть $\psi_1(q), \dots, \psi_n(q)$ — координатные функции векторной функции $\Psi(q)$. Так как эти функции непрерывно дифференцируемы, для них верна формула конечных приращений, т.е.

$$\psi_i(q + \Delta q) - \psi_i(q) = \psi'_i(q + \vartheta \Delta q) \Delta q, \quad i = \overline{1, n}, \quad \vartheta \in (0, 1), \quad (3.41)$$

где точки q и $q + \Delta q$ в области D_q таковы, что этой области принадлежит отрезок $[q, q + \Delta q]$ в \mathbb{R}^n , соединяющий эти точки. Приведенная формула представляет собой формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, примененную к скалярным функциям $\psi_i(q)$.

Множество C_q замкнуто и, будучи измеримым, ограничено, т.е. является компактом, целиком лежащим в D_q . Поэтому можно выбрать такое элементарное множество E_q , содержащее C_q , которое целиком включено в область D_q . При этом, увеличивая немного, если необходимо, промежутки, составляющие множество E_q , можно считать, что множество C_q попадает во внутренность множества E_q .

На множестве E_q как на компакте все частные производные $\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}$ функций ψ_i ограничены. Поэтому на основании формулы конечных приращений можно утверждать, что существует такое число $M > 0$, что для всех функций $\psi_i(q)$ и для любых точек q и $q + \Delta q$, для которых отрезок $[q, q + \Delta q]$ в \mathbb{R}^n целиком содержится в E_q , выполняется неравенство

$$|\psi_i(q + \Delta q) - \psi_i(q)| \leq M |\Delta q|. \quad (3.42)$$

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как множество C_q имеет меру нуль, существует такое элементарное множество \tilde{E}_q , которое содержит C_q и имеет меру $\mu(\tilde{E}_q) < \varepsilon$. Мы можем считать, что $\tilde{E}_q \subset E_q$, так как иначе вместо \tilde{E}_q можно было бы рассмотреть множество $\tilde{E}_q \cap E_q$, которое также является элементарным, содержит C_q и имеет меру менее ε .

Пусть элементарное множество \tilde{E}_q состоит из промежутков P_1, P_2, \dots, P_m . Поскольку каждый промежуток P_k целиком попадает в E_q , причем с любыми точками q и $q + \Delta q$, попавшими в P_k , этому промежутку принадлежит и отрезок $[q, q + \Delta q]$, то верно неравенство (3.42). Выбирая элементарное множество \tilde{E}_q , мы можем считать, что составляющие его промежутки P_k имеют вид

$$P_k = [a_{k1} - \delta, a_{k1} + \delta] \times \dots \times [a_{kn} - \delta, a_{kn} + \delta], \quad (3.43)$$

т.е. являются равнобедренными. Действительно, как и в случае E_q , можно считать, что C_q содержится во внутренней части множества \tilde{E}_q , и тогда появляется возможность чуть-чуть уменьшить размеры промежутков P_k . Выбрав достаточно малое δ и уменьшив длины ребер промежутков не более чем на δ , можно добиться того, что каждый из промежутков будет иметь разбиение на конечное число равнобедренных промежутков.

Итак, мы считаем, что множество \tilde{E}_q состоит из конечного числа промежутков вида P_k (3.43), $k = \overline{1, m}$, целиком включенных в E_q . Мера каждого промежутка P_k равна $(2\delta)^n$, а максимальное расстояние от центра (a_{k1}, \dots, a_{kn}) до точек промежутка равно $\sqrt{n\delta^2} = \delta\sqrt{n}$. Из неравенства (3.42) вытекает, что образ $\Psi(P_k)$ промежутка P_k целиком попадает в промежуток

$$Q_k = [b_{k1} - M\delta\sqrt{n}, b_{k1} + M\delta\sqrt{n}] \times \dots \times [b_{kn} - M\delta\sqrt{n}, b_{kn} + M\delta\sqrt{n}],$$

мера которого равна $(2M)^n n^{n/2} \delta^n$. Промежутки Q_k , $k = \overline{1, m}$, покрывают множество $C_x = \Psi(C_q)$, а их суммарная мера оцени-

вається следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \mu(Q_k) &= m(2M)^n n^{n/2} \delta^n = M^n n^{n/2} \sum_{k=1}^m \mu(P_k) = \\ &= M^n n^{n/2} \mu(\tilde{E}_q) < M^n n^{n/2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что множество C_x может быть накрыто элементарным множеством сколь угодно малой меры, а потому оно имеет меру нуль. ►

Лемма 3.8. Пусть задана замена переменных $\Psi: D_q \rightarrow D_x$, где D_q и D_x — области в \mathbb{R}^n . Если $G_q \subset D_q$ — замкнутое измеримое множество, то его образ $G_x = \Psi(G_q) \subset D_x$ — тоже измеримое множество.

◀ При замене переменных Ψ образом границы множества G_q является граница множества G_x . Действительно, пусть $q \in \partial G_q$ и $x = \Psi(q)$. Точка x принадлежит множеству $G_x = \Psi(G_q)$ и может быть либо внутренней, либо граничной точкой множества G_x . Предположим, что x является внутренней точкой G_x . Тогда существует окрестность U точки x , целиком включенная в G_x . В силу непрерывности функции Ψ существует такая окрестность V точки q , что $\Psi(V) \subset U$. Так как $U \subset G_x$, а отображение Ψ взаимно однозначно, заключаем, что $V \subset G_q$, и точка q является внутренней точкой множества G_q . Но это противоречит выбору этой точки. Следовательно, точка x не может быть внутренней точкой множества G_x , т.е. $x \in \partial G_x$.

Итак, мы доказали, что точки ∂G_q при отображении Ψ переходят в точки ∂G_x . Но точно так же точки ∂G_x при обратном отображении Ψ^{-1} переходят в точки ∂G_q . Так как множество G_q замкнуто и измеримо, его граница ∂G_q принадлежит D_q и имеет меру нуль. Согласно лемме 3.7, множество $\Psi(\partial G_q) = \partial G_x$ имеет меру нуль, а потому множество G_x измеримо. ►

Напомним, что формула замены переменного интегрирования в определенном интеграле имеет вид [VI]

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(q)) \Phi'(q) dq. \quad (3.44)$$

Эта формула верна, если функция $\Phi(q)$ одного переменного на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеет непрерывную производную. Существенным моментом в ней является то, что нижний предел интегрирования $\Phi(\alpha)$ в левой части может быть больше верхнего предела. При $\alpha < \beta$ это возможно лишь в том случае, когда $\Phi'(q)$ может принимать отрицательные значения. Предположим, что производная $\Phi'(q)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ знакопостоянна (это предположение верно, если функция $\Phi(q)$ осуществляет биективное отображение $[\alpha, \beta]$ на отрезок с концами $\Phi(\alpha)$ и $\Phi(\beta)$). Тогда при $\Phi'(q) \geq 0$ имеем $\Phi(\alpha) \leq \Phi(\beta)$, а при $\Phi'(q) \leq 0$ — $\Phi(\alpha) \geq \Phi(\beta)$. В последнем случае в формуле (3.44) поменяем местами пределы интегрирования, чтобы нижний предел интегрирования не превосходил верхнего. Тогда интеграл в левой части равенства изменит знак. Изменив знак и в правой части, с учетом равенства $-\Phi'(q) = |\Phi'(q)|$ приходим к формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(q)) |\Phi'(q)| dq, \quad (3.45)$$

где a и b — левый и правый концы отрезка, являющегося образом отрезка $[\alpha, \beta]$ при отображении Φ . Очевидно, что формула (3.45) верна и в том случае, когда $\Psi'(q) \geq 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Модификация (3.45) формулы замены переменного в определенном интеграле может быть обобщена на многомерный случай, но при этом в интеграле справа модуль производной функции Φ одного переменного нужно заменить на модуль якобиана функции многих переменных $\Psi(q)$.

Замкнутую область $G \subset \mathbb{R}^n$ назовем *простой*, если для каждой из координат x_i точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует разбиение этой области на замкнутые частичные множества, которые являются замкнутыми областями и правильными множествами относительно координаты x_i . Напомним, что, согласно лемме 3.6, множество, правильное относительно какой-либо координаты, измеримо. Поэтому простая область, как конечное объединение измеримых множеств, является измеримым множеством, что позволяет рассматривать такую область в качестве области интегрирования кратного интеграла.

Теорема 3.9. Пусть задана замена переменных $\Psi: D_q \rightarrow D_x$, где D_q и D_x — области в \mathbb{R}^n . Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутой области $G_x \subset D_x$, причем ее прообраз $G_q = \Psi^{-1}(G_x)$ является простой областью, то функция $f(\Phi(q)) |\det \Phi'(q)|$ интегрируема на множестве G_q и имеет место равенство

$$\int_{G_x} f(x) dx = \int_{G_q} f(\Phi(q)) |\det \Phi'(q)| dq. \quad (3.46)$$

◀ Функция $F(q) = f(\Phi(q)) |\det \Phi'(q)|$ непрерывна в замкнутой измеримой области G_q , а значит, согласно теореме 3.6, интегрируема в ней. Равенство (3.46) докажем методом математической индукции по числу преобразуемых переменных интегрирования. Преобразуем сначала одно переменное, например x_n . Тогда в координатной записи отображение Φ примет вид

$$x_i = q_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad x_n = \Psi_n(q).$$

По условию область G_q является простой. Используя свойство аддитивности кратного интеграла, интеграл по области G_q можно представить в виде суммы интегралов по частичным областям, каждая из которых является правильным множеством в направлении любой из координатных осей. Очевидно,

достаточно рассмотреть одно из таких слагаемых. Поэтому, не теряя общности изложения, можно считать, что G_q имеет вид

$$G_q = \left\{ (\tilde{q}, q_n) \in D_q: \tilde{q} \in \tilde{G}_q, \varphi(\tilde{q}) \leq q_n \leq \psi(\tilde{q}) \right\}.$$

Для отображения Ψ специального вида образ G_x области G_q будет множеством точек $x = (\tilde{x}, x_n)$, где $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$, которые подчиняются условиям

$$\tilde{x} \in \tilde{G}_x, \quad \Phi_n(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \leq x_n \leq \Phi_n(\tilde{x}, \psi(\tilde{x})).$$

Используя теорему 3.8 и формулу (3.45) для определенного интеграла, получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_x} f(x) dx &= \int_{\tilde{G}_x} d\tilde{x} \int_{\Phi_n(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))}^{\Phi_n(\tilde{x}, \psi(\tilde{x}))} f(\tilde{x}, x_n) dx_n = \\ &= \int_{\tilde{G}_q} d\tilde{q} \int_{\Phi_n(\tilde{q}, \varphi(\tilde{q}))}^{\Phi_n(\tilde{q}, \psi(\tilde{q}))} f(\tilde{q}, \Phi_n(\tilde{q})) \left| \frac{\partial \Phi_n(q)}{\partial q_n} \right| dq_n = \\ &= \int_{G_q} f(\Phi(q)) |\det \Phi'(q)| dq. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (3.46) верно при преобразовании одного переменного интегрирования.

Предположим, что равенство (3.46) верно при преобразовании k переменных. Если $k+1 < n$, то повторным использованием теоремы 3.8 можно n -кратный интеграл свести к $(k+1)$ -кратному. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $k+1 = n$. Поскольку отображение Φ непрерывно дифференцируемо и $\det \Phi'(q) \neq 0$, $q \in G_q$, то в окрестности любой точки из G_q хотя бы один элемент каждого столбца матрицы $\Phi'(q)$ отличен от нуля. Рассмотрим разбиение области

G_q на области, правильные относительно n -й координаты, в каждой из которых выделенный элемент n -го столбца матрицы $\Phi'(q)$ отличен от нуля. При этом, не ограничивая общности, можем считать, что $\frac{\partial \Phi_n(q)}{\partial q_n} \neq 0$, $q \in G_q$. Тогда, согласно теореме о неявной функции, уравнение $x_n = \Phi_n(\tilde{q}, q_n)$ однозначно разрешимо относительно q_n , т.е. $q_n = \eta(\tilde{q}, x_n)$, причем функция $\eta(\tilde{q}, x_n)$ непрерывно дифференцируема.

Отображение Φ общего вида можно представить как композицию $\Phi = \Theta \circ \Omega$ отображения $\Omega: G_q \subset \mathbb{R}_q^n \rightarrow G_y \subset \mathbb{R}_y^n$, имеющего координатную форму

$$y_i = q_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = \Phi_n(q_1, \dots, q_n),$$

и отображения $\Theta: G_y \subset \mathbb{R}_y^n \rightarrow G_x \subset \mathbb{R}_x^n$, в координатной записи имеющего вид

$$x_i = \Phi_i(\tilde{y}, \eta(\tilde{y}, y_n)), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad x_n = y_n,$$

где $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$. Нетрудно убедиться, что

$$\det \Phi'(q) = \det \Omega'(q) \cdot \det \Theta'(\Omega(q)), \quad q \in G_q.$$

Согласно предположению, теорема верна при преобразовании k переменных, т.е. она верна для отображения Θ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{G_x} f(x) dx &= \int_{G_y} f(\Theta(y)) |\det \Theta'(y)| dy = \\ &= \int_{\tilde{G}} d\tilde{y} \int_{\Phi_n(\tilde{y}, \varphi(\tilde{y}))}^{\Phi_n(\tilde{y}, \psi(\tilde{y}))} f(\Theta(y)) |\det \Theta'(y)| dy_n = \\ &= \int_{\tilde{G}} d\tilde{q} \int_{\varphi(\tilde{q})}^{\psi(\tilde{q})} f(\Phi(q)) |\det \Omega'(q)| |\det \Theta'(\Omega(q))| dq_n = \\ &= \int_{G_q} f(\Phi(q)) |\det \Phi'(q)| dq. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание 3.2. Формула (3.46) замены переменных в кратном интеграле остается в силе, если условие взаимной однозначности замены переменных Φ нарушается на множестве меры нуль.

Пример 3.6. Найдем меру n -мерного шара

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}.$$

Для этого введем n -мерные сферические координаты $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ по формулам

$$\begin{cases} x_1 = r \prod_{i=1}^{n-1} \sin \varphi_i, \\ x_k = r \cos \varphi_{k-1} \prod_{i=k}^{n-1} \sin \varphi_i, \quad k = \overline{2, n-1}, \\ x_n = r \cos \varphi_{n-1}, \end{cases} \quad (3.47)$$

где $r \geq 0$; $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$; $0 \leq \varphi_k \leq \pi$, $k = \overline{2, n-1}$. Якобиан соответствующего отображения Φ , которое определяется формулами (3.47), имеет вид

$$\det \Phi' = r^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} \sin^{k-1} \varphi_k. \quad (3.48)$$

Нетрудно убедиться, что прообразом шара B при отображении Φ является n -мерный промежуток B_q , который описывается неравенствами

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_k \leq \pi, \quad k = \overline{2, n-1}.$$

Отображение Φ является взаимно однозначным в B_q всюду, за исключением некоторого множества меры нуль. Применяя

формулу замены переменных (3.46) и учитывая вид якобиана (3.48) отображения Φ , находим

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_B dx = \int_{B_q} |\det \Phi'| dq = \\ &= \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \prod_{k=2}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{k-1} \varphi_k d\varphi_k = \\ &= 2\pi \frac{R^n}{n} \prod_{m=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^m \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

где $q = (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$. Используя рекуррентное соотношение [VI]

$$\int \sin^m x dx = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx, \quad m \in \mathbb{N},$$

вычисляем определенные интегралы

$$I_m = \int_0^\pi \sin^m \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi(2k-1)!!}{(2k)!!}, & m = 2k, k \in \mathbb{N}; \\ \frac{2(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & m = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} 0!! &= 1, & (2k)!! &= 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k), \\ 1!! &= 1, & (2k-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1). \end{aligned}$$

Заметим, что $I_{2k-1} I_{2k} = \pi/k$, $k \in \mathbb{N}$. Используя эти интегралы, в итоге получаем значение объема n -мерного шара:

$$\mu(B) = 2\pi \frac{R^n}{n} \prod_{m=1}^{n-2} I_m = \begin{cases} \frac{\pi^k R^{2k}}{k!}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}; \\ \frac{2^{k+1} \pi^k R^{2k+1}}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}. \quad \# \end{cases}$$

3.7. Кратные несобственные интегралы

До сих пор мы рассматривали n -кратный интеграл от ограниченной подынтегральной функции по измеримому, а значит ограниченному, множеству в \mathbb{R}^n . Понятие кратного интеграла можно обобщить и на некоторые случаи, когда либо область интегрирования не является ограниченной (несобственный интеграл первого рода), либо подынтегральная функция является неограниченной (несобственный интеграл второго рода). Указанное обобщение может быть построено по той же схеме, что и двойной несобственный интеграл.

Определение 3.3. *Монотонным исчерпыванием области D в \mathbb{R}^n называют последовательность $\{D_k\}$ измеримых областей, для которых выполняются условия:*

- 1) $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$.

Пример 3.7. Для области $D = \mathbb{R}^n$ в качестве монотонного исчерпывания можно взять последовательность $\{B_k\}$ n -мерных шаров, радиусы которых неограниченно возрастают:

$$B_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < k^2\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Монотонным исчерпыванием D также является последовательность n -мерных промежутков

$$X_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: |x_i| < k, i = \overline{1, n}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3.9. Пусть $\{D_k\}$ и $\{D'_k\}$ — монотонные исчерпывания области $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такой номер N_k , что $\overline{D_k} \subset D'_{N_k}$.

◀ Выберем произвольный номер k . Множество $\overline{D_k}$, будучи замкнутым и ограниченным, является компактом. Так как

$\overline{D}_k \subset D_{k+1} \subset D$, то последовательность $\{D'_j\}$ является открытым покрытием D_k . В силу компактности D_k из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $D'_{i_1}, \dots, D'_{i_m}$ множества D_k . Предполагая, что $i_1 < \dots < i_m$, заключаем, что $D_{i_1} \subset \dots \subset D_{i_m}$. Следовательно,

$$\overline{D}_k \subset \bigcup_{i=1}^m D_{i_m} = D_{i_m}.$$

Номер i_m и есть искомый номер N_k . ►

Определение 3.4. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в любой измеримой подобласти области $D \subset \mathbb{R}^n$. Если для любого монотонного исчерпывания $\{D_k\}$ области D существует предел

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx,$$

причем этот предел не зависит от выбора монотонного исчерпывания, то число I называют *несобственным n -кратным интегралом* функции $f(x)$ по области D . Если область D неограниченная, то число I называют *несобственным интегралом первого рода*. Если же область D ограниченная, но неограниченной в D является функция $f(x)$, то I называют *несобственным интегралом второго рода*.

Для несобственных интегралов используют те же обозначения, что и для обычных кратных интегралов (также называемых собственными интегралами). Таким образом, в соответствии с определением

$$\int_D f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx.$$

Отметим, что под несобственным интегралом часто понимают не только конкретное значение I предела интегралов

по областям монотонного исчерпывания, но и сам этот предел. Если этот предел существует и конечен, то говорят о *сходящемся несобственном интеграле*, а если предел не существует или бесконечен, то говорят о *расходящемся несобственном интеграле*.

Теорема 3.10. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна в области D и интегрируема в любой измеримой подобласти этой области. Тогда для сходимости несобственного интеграла $f(x)$ по области D необходимо и достаточно, чтобы существовало такое монотонное исчерпывание $\{D_k\}$ области D , что последовательность интегралов

$$I_k = \int_{D_k} f(x) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

будет ограничена.

◀ Доказательство теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.15, и мы его не будем приводить. Особо отметим, что это доказательство включает в себя как часть доказательство аналога леммы 3.9 для двумерного случая. ▶

Теорема 3.11. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по любой измеримой подобласти области D и удовлетворяют неравенству $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in D$. Тогда:

- 1) если сходится несобственный интеграл $\int_D g(x) dx$, то сходится несобственный интеграл $\int_D f(x) dx$;
- 2) если расходится несобственный интеграл $\int_D f(x) dx$, то расходится несобственный интеграл $\int_D g(x) dx$.

◀ Сформулированная теорема обобщает на многомерный случай теорему 1.16, а ее доказательство, по существу, не отличается от доказательства теоремы 1.16. ▶

Теорема 3.12. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по любой измеримой подобласти области $D \subset \mathbb{R}^n$. Несобственный интеграл $\int_D f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_D |f(x)| dx$. #

Сформулированная теорема, которую мы приводим без доказательства, объединяет и обобщает теоремы 1.17 и 1.18. Напомним, что в случае сходимости интеграла $\int_D |f(x)| dx$ говорят об абсолютной сходимости интеграла $\int_D f(x) dx$. В одномерном случае условие абсолютной сходимости более сильное, чем условие простой сходимости. Однако, как утверждает теорема 3.12, в многомерном случае два этих понятия совпадают.

Пример 3.8. Исследуем на сходимость n -кратный ($n \geq 3$) несобственный интеграл второго рода

$$\int_D \frac{dx}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha/2}}$$

по области

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

при различных значениях параметра α .

Этот интеграл является несобственным потому, что подынтегральная функция не ограничена в окрестности начала координат. Выберем монотонное исчерпывание области D областями

$$D_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 1/(2k)^2 < x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для вычисления интегралов от функции $f(x)$ по областям D_k , $k \in \mathbb{N}$, удобно перейти к n -мерным сферическим координатам

$r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ (см. пример 3.6). Обозначим

$$c_n = \int_{2\pi} \cos \varphi_1 d\varphi_1 \prod_{k=2}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{k-1} \varphi_k d\varphi_k = \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}; \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!}, & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда

$$I_k = \int_{D_k} \frac{dx}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha/2}} = c_n \int_{1/(2k)}^1 \frac{r^{n-1} dr}{r^\alpha} = c_n \int_{1/(2k)}^1 \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}}. \quad (3.49)$$

При $k \rightarrow \infty$ определенный интеграл в правой части (3.49) переходит в несобственный неопределенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{r^{\alpha-n+1}}$, сходящийся при $\alpha - n + 1 > 1$. Используя теорему 3.10, непосредственным вычислением при $\alpha < n$ находим

$$\int_D \frac{dx}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \frac{c_n}{n - \alpha}.$$

Итак, исследуемый интеграл расходится при $\alpha \geq n$ и сходится при $\alpha < n$ к значению $\frac{c_n}{n - \alpha}$.

Вопросы и задачи

3.1. Доказать утверждение: измеримое множество имеет меру нуль тогда и только тогда, когда оно не имеет внутренних точек.

3.2. Показать, что декартово произведение $D = A \times B$ измеримых множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ является измеримым множеством пространства \mathbb{R}^{n+m} и при этом $\mu(D) = \mu(A)\mu(B)$.

3.3. Сформулировать определение предела интегральных сумм для действительной функции n переменных.

3.4. Составить интегральную сумму и суммы Дарбу для функции $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, соответствующие разбиению области

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_k \in [0, a_k], k = \overline{1, n}\}$$

на промежутки

$$D_{i_1 \dots i_n} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \frac{i_k - 1}{N_k} a_k \leq x_k \leq \frac{i_k}{N_k} a_k, k = \overline{1, n} \right\},$$

$$i_1 = \overline{1, N_1}, i_2 = \overline{1, N_2}, \dots, i_n = \overline{1, N_n}.$$

3.5. Вычислить объем (меру) n -мерной пирамиды

$$D = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_k \geq 0, k = \overline{1, n}, \frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1 \right\}.$$

3.6. Найти якобиан отображения, имеющего следующую координатную запись:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 r \prod_{i=1}^{n-1} \sin \varphi_i; \\ x_k = a_k r \cos \varphi_{k-1} \prod_{i=k}^{n-1} \sin \varphi_i, & k = \overline{2, n-1}; \\ x_n = a_n r \cos \varphi_{n-1}, \end{cases}$$

где $n \geq 3$, а $a_k, k = \overline{1, n}$, — положительные константы (это отображение вводит n -мерные сферические координаты).

3.7. Используя определенные в задаче 3.6 n -мерные сферические координаты $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, вычислить объем (меру) n -мерного эллипсоида

$$D = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \right\}.$$

3.8. Вычислить n -мерный интеграл

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1^2 + \dots + x_n^2) dx_1 \dots dx_n.$$

3.9. Исследовать на сходимость несобственный интеграл первого рода

$$\int_D \frac{dx_1 \dots dx_n}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha/2}}$$

по неограниченной области

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_1^2 + \dots + x_n^2 > 1\}$$

при различных значениях параметра $\alpha > 0$.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотренный в предыдущих главах подход к вычислению *кратных интегралов* может оказаться нерациональным, если при сведении их к повторным интегралам подынтегральная функция будет слишком сложной. Этот подход вообще не применим, если хотя бы один из повторных интегралов неберущийся или же подынтегральная функция задана табличным способом. В таких ситуациях, как и в аналогичных ситуациях для определенного интеграла, прибегают к приемам численного интегрирования. В этой главе обсудим особенности численного интегрирования для кратных интегралов.

4.1. Использование одномерных квадратурных формул

Трудоемкость вычисления *кратного интеграла* с помощью *численного интегрирования* зависит от сложности подынтегральной функции и *области интегрирования* и в сильной степени — от *кратности интеграла*. Сначала рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда область интегрирования ограничена координатными поверхностями какой-либо системы координат или же может быть преобразована в такую область заменой переменных.

Если область интегрирования кратного интеграла является n -мерным промежутком (для *двойного интеграла* это соответствует прямоугольнику, а для *тройного интеграла* — прямоугольному параллелепипеду), то каждое переменное интегрирования изменяется независимо, в пределах фиксированного отрезка. Поэтому в *повторном интеграле* пределы интегрирования всех внутренних определенных интегралов будут

постоянными, а вычисление повторного интеграла можно проводить с использованием какой-либо квадратурной формулы.

Рассмотрим подробнее процедуру вычисления двойного интеграла по прямоугольнику

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

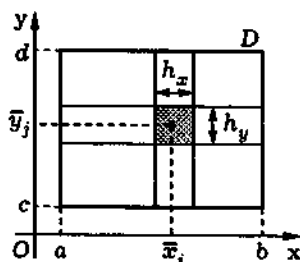


Рис. 4.1

(рис. 4.1). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в D . Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику D представим повторным:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (4.1)$$

Для вычисления внутреннего определенного интеграла

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

в повторном интеграле разобьем отрезок $[a, b]$ на m частичных отрезков равной длины $h_x = \frac{b-a}{m}$ (см. рис. 4.1) и используем квадратурную формулу средних, имеющую второй порядок точности. В результате получим

$$F(y) \approx h_x \sum_{i=1}^m f(\bar{x}_i, y) = \Phi(y), \quad (4.2)$$

где $\bar{x}_i = \frac{i-1/2}{h_x}$ — абсциссы узлов квадратурной формулы. Затем, разбивая отрезок $[c, d]$ на n частичных отрезков длиной $h_y = \frac{d-c}{n}$ и используя для внешнего определенного интеграла

в (4.1) ту же квадратурную формулу, с учетом (4.2) находим

$$\int_c^d F(y) dy \approx h_y \sum_{j=1}^n F(\bar{y}_j) = J_1.$$

Значение $F(\bar{y}_j)$ в соответствии с (4.2) заменим значением $\Phi(\bar{y}_j)$ функции $\Phi(y)$. Получим

$$J_1 \approx h_y \sum_{j=1}^n \Phi(\bar{y}_j) = h_x h_y \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j),$$

где $\bar{y}_j = \frac{j-1/2}{h_y}$, и в итоге придем к приближенной формуле

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy \approx h_x h_y \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = J, \quad (4.3)$$

погрешность $R = I - J$ которой в случае дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ можно оценить следующим образом.

Обозначим

$$M_{2x} = \max_{(x;y) \in D} \left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|, \quad M_{2y} = \max_{(x;y) \in D} \left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|. \quad (4.4)$$

Погрешность $R_x(y) = F(y) - \Phi(y)$, возникающая в (4.2), имеет оценку [VI]

$$|R_x(y)| \leq \frac{b-a}{24} h_x^2 \max_{(x;y) \in D} \left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right| \leq \frac{b-a}{24} h_x^2 M_{2x}. \quad (4.5)$$

Вычисление при помощи формулы средних внешнего определенного интеграла в (4.1) вызывает погрешность $R_1 = I - J_1$, для

которой в соответствии с применяемой квадратурной формулой имеем оценку

$$|R_1| \leq \frac{d-c}{24} h_y^2 \max_{y \in [c,d]} \frac{d^2 F(y)}{dy^2}.$$

Для оценки второй производной функции $F(y)$ используем ее представление интегралом и правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра [VI]:

$$\left| \frac{d^2 F(y)}{dy^2} \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \right| dx \leq M_{2y}(b-a).$$

В результате приходим к оценке, аналогичной (4.5):

$$|R_1| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{24} h_y^2 M_{2y}. \quad (4.6)$$

Проследив вывод приближенной формулы (4.3), можем записать

$$\begin{aligned} I = R_1 + J_1 &= R_1 + h_y \sum_{j=1}^n F(\bar{y}_j) = R_1 + h_y \sum_{j=1}^n (R_x(\bar{y}_j) + \Phi(\bar{y}_j)) = \\ &= R_1 + h_y \sum_{j=1}^n R_x(\bar{y}_j) + h_x h_y \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j), \end{aligned}$$

откуда получаем представление

$$R = R_1 + h_y \sum_{j=1}^n R_x(\bar{y}_j) = R_1 + R_2.$$

Для оценки слагаемого R_2 используем (4.5):

$$\begin{aligned} |R_2| &= h_y \left| \sum_{j=1}^n R_x(\bar{y}_j) \right| \leq h_y \sum_{j=1}^n |R_x(\bar{y}_j)| \leq \\ &\leq n h_y \frac{b-a}{24} h_x^2 M_{2x} = \frac{(b-a)(d-c)}{24} h_x^2 M_{2x}. \end{aligned}$$

Суммируя оценку (4.6) слагаемого R_1 и полученную оценку слагаемого R_2 , находим оценку погрешности R формулы (4.3):

$$|R| \leq |R_1| + |R_2| = \frac{(b-a)(d-c)}{24} (h_x^2 M_{2x} + h_y^2 M_{2y}) = \\ = \frac{(b-a)(d-c)}{24} \left(\frac{(b-a)^2}{m^2} M_{2x} + \frac{(d-c)^2}{n^2} M_{2y} \right). \quad (4.7)$$

Таким образом, формула (4.3) имеет второй порядок точности.

Предполагая наличие ограничения $|R| \leq \varepsilon$ на допустимую погрешность вычисления интеграла (4.1) и располагая значениями M_{2x} и M_{2y} , можно подобрать m и n так, чтобы минимизировать общее число точек, в которых необходимо вычислять значения подынтегральной функции. Согласно приближенной формуле (4.3), количество этих точек равно mn .

Вместо формулы средних для вычисления двойного интеграла по прямоугольнику D можно использовать любую другую квадратурную формулу, например *формулу трапеций* или *формулу парабол*. Так, выбирая равномерное разбиение отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно на m и n частичных отрезков длины h_x и h_y , а затем применяя к обоим определенным интегралам в (4.1) формулу трапеций, получаем приближенную формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx h_x h_y \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n A_{ij} f(x_i, y_j), \quad (4.8)$$

где $x_i = ih_x$, $y_j = jh_y$ — координаты узлов квадратурной формулы, а коэффициенты A_{ij} принимают одно из трех значений $1/4$, $1/2$ и 1 , первое из которых соответствует узлам в углах прямоугольника D , второе — узлам на сторонах D , а третье — узлам внутри D . Можно показать, что при достаточной гладкости подынтегральной функции формула (4.8) имеет также второй порядок точности. Применение же формулы парабол для вычисления двойного интеграла по прямоугольнику D дает приближенную формулу четвертого порядка точности.

Использование *квадратурной формулы Гаусса* позволяет сохранить порядок точности приближенной формулы, но уменьшить число узлов и тем самым общее количество вычисляемых значений функции.

Пример 4.1. Для вычисления двойного интеграла*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y) dy$$

применим формулу парабол. Обозначая внутренний интеграл через $F(x)$ и разбивая отрезок $[0, \pi/2]$ на $m = 4$ частичных отрезков равной длины $h_x = \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{8}$, в соответствии с формулой парабол запишем

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx \approx \frac{h_x}{3} (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4), \quad (4.9)$$

где

$$F_i = F(x_i) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x_i + y) dy, \quad x_i = ih_x = i\frac{\pi}{8}, \quad i = \overline{0, 4}.$$

Интегралы F_i вычислим, разбивая отрезок $[0, \pi/2]$ на $n = 2$ частичных отрезков и применяя *формулу Симпсона***

$$F_i = \frac{h_y}{3} \left(\sin(x_i + y_0) + 4\sin(x_i + y_1) + \sin(x_i + y_2) \right),$$

где $h_y = \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{8}$, $y_j = jh_y = j\frac{\pi}{8}$, $j = 0, 1, 2$. Для проведения вычислений нужны значения $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{8} \approx 0,3827$, $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} \approx 0,7071$, $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{5\pi}{8} \approx 0,9239$ и $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Используя

* См.: Копченова Н.В., Марон И.А.

** Т. Симпсон (1710–1761) — английский математик.

их, получаем

$$F_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(0+y) dy \approx \frac{\pi}{24} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \approx \frac{\pi}{24} \cdot 2,2379,$$

$$F_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{8}+y\right) dy \approx \frac{\pi}{24} \left(\sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{8} \right) \approx \frac{\pi}{24} \cdot 4,1350,$$

$$F_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right) dy \approx \frac{\pi}{24} \left(\sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \approx \frac{\pi}{24} \cdot 5,4027,$$

$$F_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{8}+y\right) dy \approx \frac{\pi}{24} \left(\sin \frac{3\pi}{8} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{8} \right) \approx \frac{\pi}{24} \cdot 5,8478,$$

$$F_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy \approx \frac{\pi}{24} \left(\sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \approx \frac{\pi}{24} \cdot 5,4027.$$

Найденные значения F_i позволяют получить с помощью формулы (4.9) приближенное значение интеграла:

$$I \approx \left(\frac{\pi}{24}\right)^2 (2,2379 + 5,4027 + 2 \cdot 5,4027 + 4(4,1350 + 5,8478)) \approx \\ \approx 0,0171347 \cdot 58,3772 \approx 1,00028.$$

Для оценки погрешности полученного приближенного значения можно использовать точное значение двойного интеграла

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y) dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) dx = \left(\sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Сравнивая точные и приближенные значения, заключаем, что относительная погрешность не превышает 0,03%.

Теперь изменим приближенную формулу, ограничиваясь разбиением отрезка $[0, \pi/2]$ на два частичных отрезка длиной $h'_x = \frac{\pi}{4}$ и используя для внешнего интеграла формулу Симпсона. В этом случае вместо (4.9) получим

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx \approx \frac{h'_x}{3} (F_0 + 4F_2 + F_4).$$

С учетом уже найденных значений F_0, F_2, F_4 находим

$$I \approx \frac{\pi^2}{12 \cdot 24} (2,2379 + 4 \cdot 5,4027 + 5,4027) \approx 1,00243.$$

Модификация приближенной формулы привела к возрастанию относительной погрешности вычислений до 0,243%. #

Тройной интеграл по прямоугольному параллелепипеду $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [p, q]\}$ (рис. 4.2) можно вычислить по приближенной формуле, полученной путем трехкратного применения формулы средних:

$$I = \int_p^q \int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy dz \approx h_x h_y h_z \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l g(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k), \quad (4.10)$$

где $h_x = \frac{b-a}{m}$, $h_y = \frac{d-c}{n}$, $h_z = \frac{q-p}{l}$ и $\bar{x}_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)h_x$, $\bar{y}_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)h_y$, $\bar{z}_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)h_z$. Можно показать, что в случае дважды непрерывно дифференцируемой в Ω функции $g(x, y, z)$ эта приближенная формула имеет второй порядок точности.

Использование других квадратурных формул для вычисления тройного интеграла аналогично.

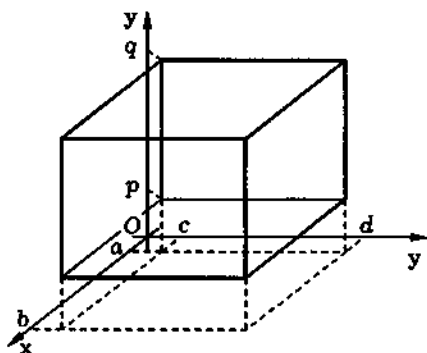


Рис. 4.2

Описанный подход к вычислению кратных интегралов можно использовать и в случае, когда область интегрирования не является n -мерным промежутком, но сводится к n -мерному промежутку заменой переменных. Например, рассмотрим тройной интеграл по половине полого шара, которую в сферических координатах r, θ, φ можно записать в виде

$$\Omega_* = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [R_0, R], \theta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Переходя к полярным координатам, получим повторный интеграл

$$I_* = \int_{\Omega_*} g(x, y, z) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{R_0}^R f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr.$$

Применение формулы средних к вычислению этого повторного интеграла приводит к приближенной формуле

$$I_* \approx h_r h_\theta h_\varphi \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(r_i, \theta_j, \varphi_k) r_i^2 \sin \theta_j, \quad (4.11)$$

где $h_r = \frac{R-R_0}{m}$, $h_\theta = \frac{\pi}{2n}$, $h_\varphi = \frac{2\pi}{l}$ и $r_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)h_r$, $\theta_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)h_\theta$, $\varphi_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)h_\varphi$.

Вычисление кратного интеграла путем последовательного вычисления определенных интегралов с помощью квадратурных формул возможно в любом случае, когда кратный интеграл можно представить как повторный. В качестве примера рассмотрим двойной интеграл

$$I_S = \iint_{D^*} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy, \quad (4.12)$$

где

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx,$$

а D^* является *правильной областью* в направлении оси Oy и описывается неравенствами $\alpha \leq y \leq \beta$, $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$ (рис. 4.3). Разобьем область интегрирования D_* на слои прямыми $y = y_j$, $j = \overline{0, n}$, параллельными оси Ox , и вдоль каждой из них определим приближенное значение интеграла $F(y)$, которое обозначим $F(y_j)$. При вычислении значений $F(y_j)$ количество и расположение узлов на каждой прямой $y = y_j$ можно выбирать независимо (на рис. 4.3 узлы на каждой прямой расположены равномерно, хотя количество узлов и шаг между ними на разных прямых различны). Затем, располагая значениями $F(y_j)$, можно вычислить приближенное значение J интеграла I_S . При

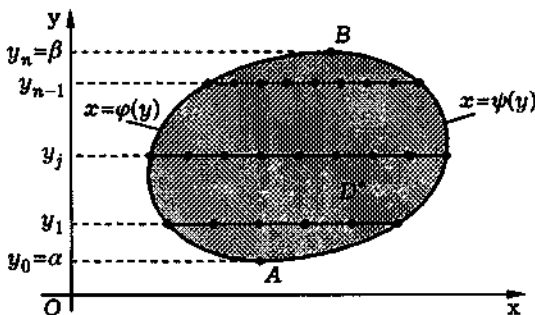


Рис. 4.3

этом узлами квадратурной формулы будут значения y_j . Если ориентироваться на квадратурную формулу с равноотстоящими узлами, то параллельные прямые $y = y_j$ следует располагать с постоянным шагом.

Отметим, что для области интегрирования, изображенной на рис. 4.3, крайним прямым $y = y_0 = \alpha$ и $y = y_n = \beta$ соответствуют нулевые значения $F(y_0) = F(\alpha)$ и $F(y_n) = F(\beta)$. Если граница ∂D^* области интегрирования в окрестности точек A и B является гладкой, то значения производных $F'(\alpha)$ и $F'(\beta)$ могут быть неограниченными. Это может привести к понижению порядка точности используемой квадратурной формулы. В этом случае для обеспечения нужной точности при небольшом числе параллельных хорд целесообразно использовать квадратурную формулу Гаусса, расположив соответствующим образом прямые $y = y_j$.

Аналогично для вычисления тройного интеграла

$$I_V = \int_{\Omega^*} g(x, y, z) dV = \int_{\gamma}^{\delta} dz \int_{\omega(z)}^{\chi(z)} dy \int_{\varphi(y, z)}^{\psi(y, z)} g(x, y, z) dx$$

пространственную область интегрирования Ω^* необходимо разбить на слои плоскостями $z = z_k$, $k = \overline{0, l}$ (рис. 4.4). Пересечение каждой из этих плоскостей с Ω^* даст плоскую замкнутую область D_k , для которой описанным выше способом можно найти приближенное значение G_k двойного интеграла

$$G_k = \int_{\omega(z)}^{\chi(z)} dy \int_{\varphi(y, z)}^{\psi(y, z)} g(x, y, z) dx.$$

Затем по известным значениям G_k с помощью какой-либо квадратурной формулы можно найти приближенное значение интеграла I_V . Если граница области интегрирования Ω^* в окрестности точек с аппликатами γ и δ , а также точек с ординатами

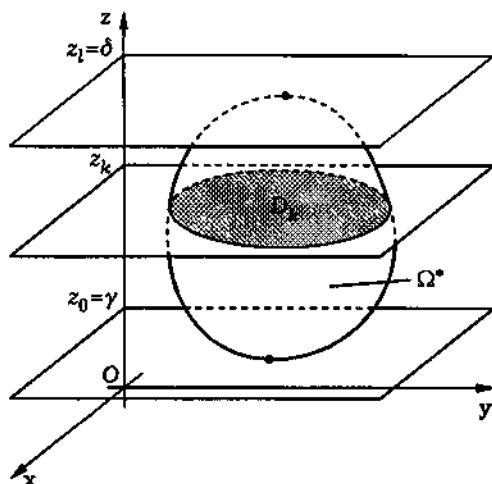


Рис. 4.4

$\omega(z_k)$ и $\chi(z_k)$, $k = \overline{1, l-1}$, является гладкой, то, как и в рассмотренной выше ситуации для плоской области интегрирования D^* , порядок точности используемых квадратурных формул может быть ниже возможного из-за того, что в этих точках производные подынтегральных функций не ограничены.

4.2. Кубатурные формулы

Остановимся подробнее на задаче вычисления *двойного интеграла*. Для таких интегралов применение квадратурных формул (см. 4.1) приводит к приближенной формуле (например, (4.3)), представляющей собой сумму значений функции двух переменных в некоторых точках области интегрирования, причем эти точки расположены специальным образом: они выбираются на совокупности прямых, параллельных одной из координатных осей. Однако приближенные формулы можно строить и при других расположениях узловых точек. В этом случае сведение двойного интеграла к повторному не ис-

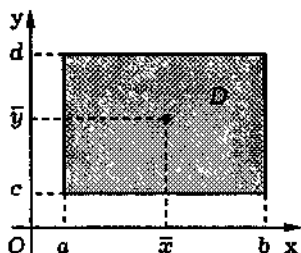


Рис. 4.5

пользуется. Формулы приближения двойных интегралов называют *кубатурными формулами*.

Сначала рассмотрим самую простую ситуацию. Пусть необходимо вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику

$$D = \{(x; y): x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

(рис. 4.5). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D , то, согласно *теореме о среднем значении для двойного интеграла*, будем иметь

$$I = \int_D f(x, y) dS = \bar{f} S = \bar{f} (b - a)(d - c),$$

где \bar{f} — *среднее значение функции* в D , совпадающее со значением $f(x, y)$ в некоторой точке $M(x; y) \in D$, а $S = (b - a)(d - c)$ — площадь прямоугольника D .

Можно считать, что точка M расположена недалеко от центра прямоугольника и что \bar{f} приближенно равно $f(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ и $\bar{y} = \frac{c+d}{2}$. Это позволяет получить простейшую кубатурную формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx f(\bar{x}, \bar{y}) S \quad (4.13)$$

с погрешностью $I_1 = I - f(\bar{x}, \bar{y}) S$, в которой используется всего лишь одно значение функции $f(x, y)$ в точке (\bar{x}, \bar{y}) , являющейся *узлом кубатурной формулы*. Если функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в D , то погрешность R_1 можно оценить, имея в виду, что кубатурная формула (4.13) является частным случаем приближенной формулы (4.3) при $m = n = 1$,

$h_x = b - a$ и $h_y = d - c$. Поэтому в соответствии с (4.7) имеем

$$|R_1| \leq \frac{S}{24} ((b-a)^2 M_{2x} + (d-c)^2 M_{2y}), \quad (4.14)$$

где M_{2x} и M_{2y} — максимальные значения модуля частных производных $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$.

Приближенная формула (4.3) также является кубатурной формулой, соответствующей узлам $(x_i; y_j)$, расположенным на пересечении прямых $x = x_i$, $i = \overline{0, m}$, и $y = y_j$, $j = \overline{0, n}$. Погрешность R такой кубатурной формулы оценивается неравенством (4.7). Отметим, что кубатурную формулу (4.3) можно рассматривать как применение кубатурной формулы (4.13) к частичным областям, на которые прямоугольник D разбивается прямыми $x = x_i$, $i = \overline{0, m}$, и $y = y_j$, $j = \overline{0, n}$.

Погрешность R кубатурной формулы (4.3) имеет оценку (4.14), пропорциональную квадратам линейных размеров *частичных областей* разбиения, или квадрату *диаметра* разбиения. В этом случае говорят о *втором порядке точности кубатурной формулы*. Если известен порядок точности кубатурной формулы, то для вычисления погрешности и уточнения приближенного значения интеграла можно применять *метод Рунге*, но при этом должно выполняться условие $h_x/h_y = \text{const}$.

Если функция $f(x, y)$ является линейной, то ее среднее значение в прямоугольнике D достигается в центре прямоугольника, т.е. в данном случае $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$, $R_1 = 0$ и кубатурная формула (4.13) дает точное значение двойного интеграла. Если используется кубатурная формула (4.3), а функция $f(x, y)$ линейна в каждом частичном прямоугольнике разбиения, то и в этом случае кубатурная формула дает точное значение интеграла. Рассматриваемые кубатурные формулы точны не только при интегрировании по прямоугольнику, но и для любой плоской замкнутой области D^* с площадью S , если в D^* подынтеграль-

ная функция линейна, а \bar{x} и \bar{y} — координаты так называемого центра тяжести этой замкнутой области, вычисляемые по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \iint_{D^*} x \, dx \, dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_{D^*} y \, dx \, dy. \quad (4.15)$$

Действительно, пусть $f(x, y) = Ax + By + C$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} f(x, y) \, dx \, dy &= A \iint_{D^*} x \, dx \, dy + B \iint_{D^*} y \, dx \, dy + C \iint_{D^*} dx \, dy = \\ &= (A\bar{x} + B\bar{y} + C)S = f(\bar{x}, \bar{y})S. \end{aligned}$$

Применение кубатурной формулы (4.13) в варианте с центром тяжести $(\bar{x}; \bar{y})$ целесообразно лишь для областей простой формы, для которых вычисление площади и координат \bar{x} и \bar{y} центра тяжести не является трудоемким. Например, для треугольника, как известно, центр тяжести совпадает с точкой пересечения медиан.

Пусть область интегрирования D ограничена ломаной. Тогда ее можно разбить на прямоугольные и треугольные частичные области D_j с площадями S_j , $j = \overline{1, N}$. В каждой из частичных областей D_j выберем ее центр тяжести $(x_j; y_j)$ и построим кубатурную формулу, обобщающую формулу (4.13):

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \sum_{j=1}^N f(\bar{x}_j, \bar{y}_j) S_j. \quad (4.16)$$

Эта кубатурная формула будет точной для любой функции $f(x, y)$, линейной в частичных областях D_j .

Оценить точность кубатурной формулы (4.16) для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции

$f(x, y)$ можно, заменяя приближенно функцию $f(x, y)$ на каждой из частичных областей D_j разбиения линейной функцией $l_j(x, y)$, например, с помощью формулы Тейлора первого порядка. В этом случае разность $\max_{(x,y) \in D_j} |f(x, y) - l_j(x, y)|$ пропорциональна квадрату диаметра частичной области D_j , а точность кубатурной формулы (4.16) — квадрату диаметра разбиения, т.е. кубатурная формула имеет второй порядок точности.

Кубатурные формулы высокой точности можно получить, приближенно заменяя подынтегральную функцию $f(x, y)$ многочленом $P(x, y)$ двух переменных.

Построение многочлена $P(x, y)$, аппроксимирующего заданную функцию $f(x, y)$, можно выполнять в рамках задачи интерполяции, предполагая, что если $P(x, y)$ совпадает с $f(x, y)$ в заданных точках, то значения многочлена и функции будут близки и в других точках. Однако в этом случае построение аппроксимирующего многочлена требует выполнения некоторых условий.

Напомним, что для однозначного построения *интерполяционного многочлена Лагранжа* степени $n - 1$ необходимо знать значения интерполируемой действительной функции одного переменного в n узлах интерполяции (в этих узлах значения многочлена и функции совпадают). В случае двух переменных полный интерполяционный многочлен степени m

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \dots + a_{pq}x^p y^q + \dots + a_{m0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + \dots + a_{0m}y^m$$

состоит из всевозможных одночленов $a_{pq}x^p y^q$ степени $p + q \leq m$. Общее число коэффициентов $a_{p,q}$ равно $K = (m + 1)(m + 2)/2$. Для их однозначного определения необходимо задать значения функции $f(x, y)$ в K точках $(x_k, y_k) \in D$. Тогда условия $P(x_k, y_k) = f(x_k, y_k)$ в совокупности дадут систему K линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Таким образом, не любому числу точек с заданными значениями функции соответствует полный интерполяционный многочлен двух переменных. Кроме того, узлы интерполяции нельзя выбирать произвольно. Действительно, для линейного многочлена (т.е. при $m = 1$) имеем $K = 3$ и СЛАУ

$$\begin{cases} a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}y_1 = f(x_1, y_1), \\ a_{0,0} + a_{1,0}x_2 + a_{0,1}y_2 = f(x_2, y_2), \\ a_{0,0} + a_{1,0}x_3 + a_{0,1}y_3 = f(x_3, y_3) \end{cases} \quad (4.17)$$

с тремя неизвестными коэффициентами $a_{0,0}$, $a_{1,0}$, $a_{0,1}$. Чтобы СЛАУ имела единственное решение, ее определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

должен быть отличен от нуля. С геометрической точки зрения значение $|\Delta_3|$ равно удвоенной площади треугольника с вершинами в выбранных точках $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$ [V].

Таким образом, для того чтобы СЛАУ (4.17) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выбранные три точки не лежали на одной прямой. Можно показать, что при $m = 2$ и $K = 6$ соответствующая СЛАУ имеет единственное решение, если выбранные шесть точек не лежат на одной кривой второго порядка, и т.д. Следует также отметить, что при произвольном расположении выбранных точек затруднена оценка погрешности, возникающей при замене функции ее полным интерполяционным многочленом.

Полный интерполяционный многочлен достаточно просто можно построить при совпадении узлов интерполяции с узлами прямоугольной сетки*. Однако этот случай не представляет интереса, так как приводит к кубатурным формулам, уже полученным выше (см. 4.1) путем сведения двойного интеграла

* См., например: Березин И.С., Жидков Н.П.

к повторному. Один из возможных путей состоит в замене подинтегральной функции неполным многочленом. При этом за счет рационального расположения узлов интерполяции можно добиться снижения объема вычислений.

Пример 4.2. В прямоугольнике D аппроксимируем подинтегральную функцию $f(x, y)$ так называемым билинейным многочленом

$$P_{11}(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy,$$

выбирая в качестве узлов интерполяции четыре вершины прямоугольника D . В этом случае, используя значения $f_{00} = f(a, c)$, $f_{10} = f(b, c)$, $f_{01} = f(a, d)$, $f_{11} = f(b, d)$, многочлен $P_{11}(x, y)$ можно представить в виде [V]

$$P_{11}(x, y) = f_{00} \frac{(b-x)(d-y)}{(b-a)(d-c)} + f_{10} \frac{(x-a)(d-y)}{(b-a)(d-c)} +$$

$$+ f_{01} \frac{(b-x)(y-c)}{(b-a)(d-c)} + f_{11} \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}.$$

Интегрируя это представление по прямоугольнику D , приходим к кубатурной формуле

$$\int_D f(x, y) dS \approx \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 A_{ij} f_{ij},$$

в которой $A_{ij} = \frac{1}{4}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$ и которая является частным случаем общей формулы (4.8).

На основе квадратурной формулы Симпсона можно построить кубатурную формулу четвертого порядка с девятью узлами в вершинах, серединах сторон и центре прямоугольника D . Такая формула соответствует аппроксимации подинтегральной

функции многочленом

$$P_{22}(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{22}x^2y^2$$

с девятью коэффициентами. В этом случае

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{36} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} f(x_i, y_j), \quad (4.19)$$

где $A_{ij} = 1$ для вершин, $A_{ij} = 4$ для середин сторон и $A_{ij} = 16$ для центра прямоугольника. По существу, эта формула использована во втором варианте расчета в примере 4.1.

Если в качестве координат x_i и y_j узлов кубатурной формулы выбрать абсциссы $x_{\pm} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ и $y_{\pm} = \frac{c+d}{2} \pm \frac{d-c}{2\sqrt{3}}$ квадратурной формулы Гаусса для отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$, то для прямоугольника D получим кубатурную формулу

$$\int_D f(x, y) dS \approx \\ \approx \frac{(b-a)(d-c)}{4} (f(x_+, y_+) + f(x_-, y_+) + f(x_+, y_-) + f(x_-, y_-))$$

всего с четырьмя узлами, но имеющую четвертый порядок точности, как и кубатурная формула (4.19) с девятью узлами. Например, для двойного интеграла

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/4} \sin(x+y) dy$$

из примера 4.1 получим

$$x_{\pm} = \pi \frac{1 \pm 1}{4\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad y_{\pm} = \pi \frac{1 \pm 1}{8\sqrt{3}}.$$

Вычислив всего четыре значения подынтегральной функции

$$f(x_+, y_+) = \sin(x_+ + y_+) = \sin \pi \frac{3 + \sqrt{3}}{8} \approx 0,9590,$$

$$f(x_-, y_+) = \sin(x_- + y_+) = \sin \pi \frac{3 - 1/\sqrt{3}}{8} \approx 0,8142,$$

$$f(x_+, y_-) = \sin(x_+ + y_-) = \sin \pi \frac{3 + 1/\sqrt{3}}{8} \approx 0,9863,$$

$$f(x_-, y_-) = \sin(x_- + y_-) = \sin \pi \frac{3 - \sqrt{3}}{8} \approx 0,4776,$$

в итоге находим

$$I \approx \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{8} (0,9590 + 0,8142 + 0,9863 + 0,4776) \approx 0,3084 \approx 0,9984.$$

Сравнивая найденное приближенное значение интеграла с точным значением 1, заключаем что погрешность составляет 0,16% и не превосходит погрешности, полученной при использовании кубатурной формулы с девятью узлами. #

Наряду с кубатурными формулами для прямоугольника известны формулы высокой точности с небольшим числом узлов для круга, правильного шестиугольника и некоторых других плоских фигур*. Можно попытаться заменить произвольную замкнутую область D^* с криволинейной границей объединением таких типовых фигур, но такое приближение весьма грубое. Более гибкой фигурой в этом отношении являются треугольники различных размеров и формы. Чтобы заменить замкнутую область с криволинейной границей объединением некоторого набора треугольников, сначала необходимо аппроксимировать границу замкнутой области ломаной, заменяя тем самым замкнутую область некоторым многоугольником, а затем выполнить *триангуляцию* этого многоугольника, разбивая его на

*См.: Копченова Н.В., Марон И.А.

некоторое множество треугольников. Приближенную замену плоской замкнутой области D^* конечным набором треугольников будем называть *триангуляцией замкнутой области D* .

Триангуляцию замкнутой области широко используют в различных приближенных методах, в том числе в *методе конечных элементов*. В этом методе треугольники являются одним из типов *конечных элементов*. В пределах каждого отдельно взятого треугольного элемента строят многочлен двух переменных, принимающий в узлах, расположенных определенным образом, заданные или искомые значения функции. Степень многочлена зависит от числа выбранных узлов.

Рассмотрим сначала простейший случай треугольного элемента D_Δ с узлами $M_k(x_k; y_k) \in D_\Delta$, $k = 1, 2, 3$, в его вершинах и заданными в этих узлах значениями $f_k = f(x_k, y_k)$ функции $f(x, y)$ (их называют *узловыми значениями*). По заданным трем значениям функции можно построить многочлен первой степени $P_1 = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$, т.е. провести линейную аппроксимацию функции $f(x, y)$. Коэффициенты a_{00} , a_{10} , a_{01} этого многочлена нетрудно найти из решения СЛАУ (4.17). Затем можно записать

$$\begin{aligned} \iint_{D_\Delta} f(x, y) dx dy &\approx \iint_{D_\Delta} P_1(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{D_\Delta} (a_{00} + a_{10}x + a_{01}y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Итоговый вид кубатурной формулы для треугольника D_Δ можно получить после вычисления интеграла в правой части этого приближенного равенства. Напомним, что этот интеграл можно выразить через координаты центра тяжести треугольника D_Δ .

Предложенный путь приводит к довольно громоздким формулам вычислений. Чтобы упростить формулы, введем в треугольнике D_Δ *барицентрические координаты точки*.

Пусть треугольник D_Δ с вершинами M_k , $k = 1, 2, 3$, имеет площадь S_Δ . Произвольная точка $M \in D_\Delta$ разделяет треугольник на три треугольника D_1, D_2, D_3 , треугольник D_k определяется своей вершиной M и стороной треугольника D_Δ , противоположной вершине M_k (рис. 4.6). Бариецентрическими координатами точки M называют три числа $\varphi_k(M) = \frac{S_k}{S_\Delta}$, $k = 1, 2, 3$, где S_k — площадь треугольника D_k .

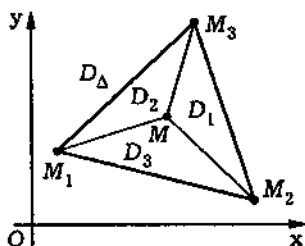


Рис. 4.6

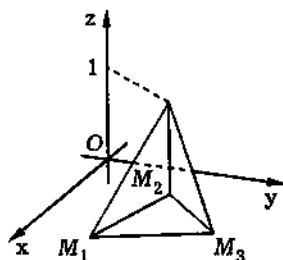


Рис. 4.7

Отметим, что бариецентрические координаты изменяются в пределах от нуля до единицы, причем $\varphi_k(M_k) = 1$ и $\varphi_k(M_j) = 0$ при $j \neq k$. Одинаковое значение $\varphi_k(M)$ имеют точки, находящиеся на прямой, параллельной стороне треугольника D_Δ , которая противоположна вершине M_k .

Функциям $\varphi_k(M)$ можно дать простую геометрическую интерпретацию. График функции $\varphi_k(M)$ представляет собой треугольник в пространстве, одной вершиной которого является точка $(x_k; y_k; 1)$, а две другие совпадают с двумя вершинами треугольника D_Δ , отличными от M_k (на рис. 4.7 изображен случай $k = 2$). Соответствующее цилиндрическое тело, ограниченное сверху указанным треугольником, представляет собой треугольную пирамиду (*тетраэдр*) с единичной высотой. Объем пирамиды равен $S_\Delta/3$, что можно записать в следующем виде:

$$\int_{D_\Delta} \varphi_k(M) dS = \frac{S_\Delta}{3}. \quad (4.21)$$

При помощи функций $\varphi_k(M)$, называемых *функциями формы* треугольного конечного элемента, несложно записать линейную аппроксимацию функции $f(M) = f(x, y)$ в пределах треугольника D_Δ :

$$f(M) \approx f_1\varphi_1(M) + f_2\varphi_2(M) + f_3\varphi_3(M) = \sum_{k=1}^3 f_k\varphi_k(M). \quad (4.22)$$

Действительно, функции $\varphi_k(M)$ есть линейные функции координат точки, поэтому правая часть записанной формулы является линейной функцией. Кроме того, легко проверить, что в вершинах треугольника эта линейная функция совпадает с $f(x, y)$.

Учитывая линейную аппроксимацию функций формы $\varphi_k(M)$ и значения (4.21) интегралов от этих функций по треугольнику D_Δ , получаем для треугольника D_Δ следующую кубатурную формулу:

$$\begin{aligned} \int_{D_\Delta} f(x, y) dS &\approx \iint_{D_\Delta} \left(\sum_{k=1}^3 f_k\varphi_k(M) \right) dS = \\ &= \sum_{k=1}^3 f_k \int_{D_k} \varphi_k(M) dS = \frac{S_\Delta}{3} \sum_{k=1}^3 f_k = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{3} S_\Delta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, достаточно знать узловые значения функции в вершинах треугольника и его площадь S_Δ , которую можно найти по координатам вершин как половину абсолютной величины определителя (4.18).

Двойной интеграл по всей замкнутой области D^* можно приближенно получить, суммируя значения интеграла по всем треугольным элементам, вычисленные с помощью формулы (4.23).

Формула (4.23) будет точной, если функция $f(x, y)$ линейна в пределах треугольника D_Δ . В этом случае функция совпадает со своей линейной аппроксимацией и равенство (4.22) будет

не приближенным, а точным, так как линейная функция однозначно определяется своими значениями в трех точках, не лежащих на прямой.

Отметим, что в треугольнике D_{Δ} наряду с линейной аппроксимацией функции $f(x, y)$ можно использовать аппроксимацию интерполяционным многочленом более высокой степени, что позволяет получить кубатурную формулу более высокого порядка точности. Например, если известны значения функции не только в вершинах треугольника, но и в серединах его сторон (всего шесть значений), то можно построить полный интерполяционный многочлен второй степени, причем этот многочлен можно представить в барицентрических координатах квадратами и попарными произведениями функций формы треугольного конечного элемента [XIII].

4.3. Многомерные кубатурные формулы

Тройной интеграл по пространственной замкнутой области от функции, не являющейся тождественной постоянной, уже нельзя рассматривать как объем некоторого тела. Тем не менее формулы для приближенного вычисления тройного интеграла и интегралов более высокой *кратности* также называют *кубатурными*. Чтобы отличать такие формулы от кубатурных для вычисления *двойного интеграла*, назовем их многомерными кубатурными формулами.

Построение многомерных кубатурных формул аналогично построению формул для двойного интеграла (см. 4.2). Упрощая изложение, ограничимся случаем тройных интегралов.

Рассмотрим тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по прямоугольному параллелепипеду

$$\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [p, q]\},$$

ребра которого параллельны координатным осям (см. рис. 4.2). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в Ω , то, согласно *теореме*

о среднем значении для тройного интеграла, имеем

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \bar{f}V,$$

где \bar{f} — среднее значение функции в Ω , а V — объем прямоугольного параллелепипеда Ω , равный $V = (b - a)(d - c)(q - p)$.

В качестве приближения среднего значения \bar{f} возьмем значение функции $f(x, y, z)$ в центре $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ прямоугольного параллелепипеда Ω , т.е. $\bar{f} \approx f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, где $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$, $\bar{y} = \frac{c+d}{2}$ и $\bar{z} = \frac{p+q}{2}$. В результате получим простейшую многомерную кубатурную формулу

$$\int_D f(x, y, z) dV \approx f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})V. \quad (4.24)$$

Если функция $f(x, y, z)$ дважды непрерывно дифференцируема в Ω , то погрешность R_1 этой кубатурной формулы можно оценить аналогично погрешности в (4.13).

Многомерную кубатурную формулу (4.24) можно модифицировать, разбив прямоугольный параллелепипед Ω на mnl частичных прямоугольных параллелепипедов с одинаковым объемом $\Delta V = V/(mnl)$ и ребрами $h_x = \frac{b-a}{m}$, $h_y = \frac{d-c}{n}$, $h_z = \frac{q-p}{l}$ (см. рис. 4.2). Тогда вместо формулы (4.24) получим многомерную кубатурную формулу

$$\int_D f(x, y, z) dV \approx h_x h_y h_z \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k), \quad (4.25)$$

где \bar{x}_i , \bar{y}_j , \bar{z}_k — координаты центров частичных прямоугольных параллелепипедов. Погрешность R записанной кубатурной формулы можно получить аналогично оценке (4.14). Сравнивая (4.10) и (4.25), заключаем, что (4.25) также имеет второй порядок точности.

Для линейной функции $f(x, y, z)$ кубатурная формула (4.24) точная, а если функция $f(x, y)$ линейна в каждом частичном прямоугольном параллелепипеде, на которые разбит прямоугольный параллелепипед Ω , то точной является многомерная кубатурная формула (4.25).

Как и в двумерном случае, многомерную кубатурную формулу вида (4.24) можно построить для произвольной замкнутой области Ω^* с объемом V , взяв в качестве точки $(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ центр тяжести Ω^* , координаты которого вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} z dV. \quad (4.26)$$

Построенная таким образом многомерная кубатурная формула будет точной, если функция $f(x, y, z)$ будет линейной в Ω^* . В самом деле, пусть $f(x, y, z) = Ax + By + Ez + C$. Тогда с учетом (4.26) получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} f(x, y, z) dV &= A \int_{\Omega^*} x dV + B \int_{\Omega^*} y dV + E \int_{\Omega^*} z dV + C \int_{\Omega^*} dV = \\ &= (A\bar{x} + B\bar{y} + E\bar{z} + C)V = Vf(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Использование многомерной кубатурной формулы (4.24) возможно лишь в случае замкнутой области Ω^* достаточно простой формы, когда вычисление объема V и координат \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} не является трудоемким.

Как и при вычислении двойного интеграла, исходную замкнутую область Ω^* можно разбить на N частичных областей Ω_j с объемами V_j и применить кубатурную формулу к каждой из частичных областей. В результате получим следующую многомерную кубатурную формулу:

$$\int_{\Omega^*} f(x, y, z) dV \approx \sum_{j=1}^N f(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j) V_j, \quad (4.27)$$

где $\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j$ — координаты центра тяжести частичной области Ω_j .

Если замкнутую область Ω^* удастся достаточно точно аппроксимировать многогранником, то этот многогранник удобно разбивать на тетраэдры. По известным значениям $f_k = f(x_k, y_k, z_k)$, $k = \overline{1, 4}$, функции $f(x, y, z)$ в четырех вершинах $M_k(x_k, y_k, z_k)$ каждого тетраэдра Ω_Δ (рис. 4.8) можно построить интерполяционный многочлен $P_1(x, y, z) = a_0 + a_x x + a_y y + a_z z$ первой степени. Четыре коэффициента a_0, a_x, a_y, a_z этого многочлена можно найти как решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

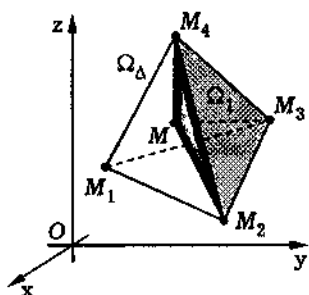


Рис. 4.8

системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$a_0 + a_x x_k + a_y y_k + a_z z_k = f_k, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Чтобы эта СЛАУ имела единственное решение, ее определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.28)$$

должен быть отличен от нуля. Преобразуем этот определитель, вычитая первую строку из остальных строк, а затем раскрывая его по первому столбцу. После преобразования получим, что

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка в правой части равенства выражает смешанное произведение трех векторов, направленных вдоль ребер тетраэдра Ω_Δ , выходящих из вершины M_1 . Поэтому он отличен от нуля, т.е. $\Delta_4 \neq 0$, если эти векторы не

являются компланарными, а четыре точки M_k не лежат в одной плоскости. Так как абсолютное значение смешанного произведения векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, а объем V_Δ тетраэдра Ω_Δ составляет шестую часть такого параллелепипеда, то $V_\Delta = |\Delta_4|/6$.

После нахождения коэффициентов многочлена $P_1(x, y, z)$ его можно использовать при построении многомерной кубатурной формулы для тетраэдра. Как и в двумерном случае, в тетраэдре Ω_Δ удобно ввести *барицентрические координаты* $\varphi_k(M) = V_k/V_\Delta$, $k = \overline{1, 4}$, где V_k — объем тетраэдра Ω_k с вершиной в точке M и основанием, совпадающим с гранью тетраэдра Ω_Δ , противоположной вершине M_k (на рис. 4.8 изображен случай $k = 1$). Ясно, что $\varphi_k(M_k) = 1$ и $\varphi_k(M_j) = 0$ при $j \neq k$.

Повторяя рассуждения, приведенные в двумерном случае, приходим к равенству

$$\int_{\Omega_\Delta} \varphi_k(M) dV = \frac{V_\Delta}{4}. \quad (4.29)$$

В данном случае функциям $\varphi_k(M)$ уже нельзя дать столь удобную геометрическую интерпретацию, как в двумерном случае, но они по-прежнему остаются линейными функциями координат точки. В самом деле, рассмотрим, например, случай $k = 1$. Тетраэдр Ω_1 образован тремя векторами $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ и $\overrightarrow{M_2M_4}$, а его объем V_k равен шестой части модуля смешанного произведения этих векторов. Отметим, что тройка векторов $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_2M_4}$ сохраняет ориентацию внутри тетраэдра Ω_k . Поскольку смешанное произведение трех векторов линейно зависит от координат вектора $\overrightarrow{M_2M}$, то и функция $\varphi_1(M)$, пропорциональная объему V_1 , линейно зависит от координат этого вектора.

Предположим, что система координат выбрана так, что грань $M_2M_3M_4$ тетраэдра Ω_Δ , являющаяся основанием тетраэдра Ω_1 , находится в плоскости xOy . Тогда $V_k = \frac{1}{3}zS_1$, где S_1 —

площадь треугольника $M_2M_3M_4$, а $V_{\Delta} = \frac{1}{3}hS_1$, где h — высота в тетраэдре Ω_{Δ} , опущенная из вершины M_1 . В результате получаем, что $\varphi_1(x, y, z) = z/h$ и

$$\iiint_{\Omega_{\Delta}} \varphi_1(x, y, z) dx dy dz = \int \frac{z}{h} dx dy dz.$$

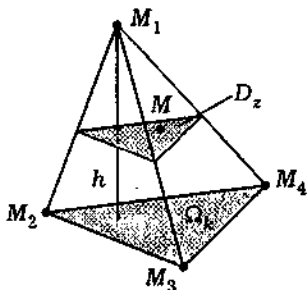


Рис. 4.9

Можно показать, что интеграл справа можно представить в виде

$$\int_0^h \frac{z}{h} dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^h z S(z) dz,$$

где D_z — сечение тетраэдра Ω_{Δ} плоскостью $z = \text{const}$, а $S(z)$ — площадь этого сечения. Но из геометрических соображений заключаем, что D_z

есть треугольник, подобный треугольнику $M_2M_3M_4$ (рис. 4.9), причем коэффициент подобия равен $\frac{h-z}{h}$. Отсюда следует, что

$$S(z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S_1 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{\Delta}} \varphi_1(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^h z \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S_1 dz = \\ &= S_1 h \int_0^1 u(1-u)^2 du = \frac{S_1 h}{12} = \frac{V_{\Delta}}{4}. \end{aligned}$$

Функции $\varphi_k(M)$, $k = \overline{1, 4}$, позволяют записать линейную аппроксимацию функции $f(x, y, z)$ в тетраэдре Ω_{Δ} в виде

$$f(x, y, z) \approx \sum_{k=1}^4 f_k \varphi_k(x, y, z). \quad (4.30)$$

Подставляя эту аппроксимацию в тройной интеграл по тетраэдру Ω_Δ и учитывая (4.29), получаем

$$\int_{\Omega_\Delta} f(x, y, z) dV \approx \int_{\Omega_\Delta} \left(\sum_{k=1}^4 f_k \varphi_k(x, y, z) \right) dV = \\ = \sum_{k=1}^4 f_k \int_{\Omega_\Delta} \varphi_k(M) dV = \frac{V_\Delta}{4} \sum_{k=1}^4 f_k. \quad (4.31)$$

Для применения многомерной кубатурной формулы (4.31) достаточно знать узловые значения f_k функции $f(x, y, z)$ в вершинах M_k тетраэдра Ω_Δ и объем V_Δ этого тетраэдра, который можно найти по координатам вершин как шестую часть абсолютной величины определителя (4.28).

Тройной интеграл по всей области интегрирования Ω^* можно приближенно вычислить как сумму приближенных значений интеграла по частичным областям разбиения. Отметим, что в частичных областях Ω_Δ наряду с линейной аппроксимацией функции $f(x, y, z)$ можно использовать и аппроксимацию интерполяционным многочленом более высокой степени, что позволяет получить более точную кубатурную формулу. В частности, если известны значения этой функции не только в вершинах тетраэдра, но и в серединах его ребер (всего 10 значений), то можно построить полный интерполяционный многочлен второй степени, который можно выразить через квадраты и попарные произведения функций $\varphi_k(M)$.

4.4. Метод статистических испытаний

Для вычисления интегралов и решения других математических задач можно использовать численный метод, основанный на моделировании случайных величин с последующей статистической оценкой характеристик этих величин. Этот метод называют *методом статистических испытаний*. Одним из

простейших приборов для получения случайных чисел является рулетка, используемая в казино, а метод статистических испытаний часто называют *методом Монте-Карло* по названию города в княжестве Монако, известного своими казино.

Основная идея применения метода Монте-Карло к решению задачи, в которой необходимо найти некоторое значение I , состоит в подборе такой случайной величины X , чтобы ее *математическое ожидание* MX было равно (или пропорционально) I . Получить приближенное значение математического ожидания и оценить точность этого значения можно методами математической статистики, проведя N независимых испытаний и построив выборку x_1, \dots, x_N объема N для рассматриваемой случайной величины X . В качестве *оценки* математического ожидания MX можно выбрать *выборочное среднее*:

$$I = MX \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n. \quad (4.32)$$

Идея метода статистических испытаний впервые была сформулирована в работе Ж.Л.Л. Бюффона*, опубликованной в 1777 г., но написанной еще в 1733 г. В этой работе был предложен метод оценки числа π путем случайного бросания иглы на лист бумаги, разграфленный равномерно расположенными параллельными прямыми.

Пусть прямые расположены с шагом a , а игла имеет длину $l \leq a$. Положение иглы можно определить углом θ между ней и прямыми и расстоянием x от центра C иглы до ближайшей из прямых (рис. 4.10). Поскольку попадание центра C иглы в любую точку, а также угол θ ее наклона по отношению к прямым равновероятны, *двумерная случайная величина* (x, θ) имеет в прямоугольнике $-a/2 \leq x \leq a/2, 0 \leq \theta \leq \pi$ *равномерное распределение*. Игла пересекает одну из прямых (а именно ближайшую), если точка $(\theta; x)$ удовлетворяет условию

*Ж.Л.Л. Бюффон (1707–1788) — французский естествоиспытатель.

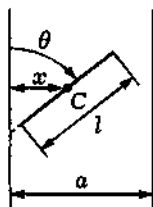


Рис. 4.10

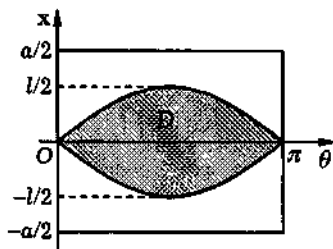


Рис. 4.11

$|x| \leq (l/2) \sin \theta$. На рис. 4.11 показана область D , попадание в которую точки $(\theta; x)$ означает касание или пересечение иглы с прямой. Вероятность P этого события равна отношению площади S_D области D к площади S прямоугольника, в котором задано распределение двумерной случайной величины. Следовательно,

$$P = \frac{S_D}{S} = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin \theta d\theta = \frac{2l}{\pi a}.$$

Таким образом, $\pi = \frac{2l}{aP}$.

Вероятность какого-либо случайного события можно оценить относительной частотой этого события, т.е. отношением \bar{N}/N числа \bar{N} появления этого события (числа успешных испытаний) к общему числу проведенных испытаний. В примере с иглой число N — это общее количество бросаний иглы, а \bar{N} — количество бросаний, в которых произошло пересечение или касание иглы одной из прямых. В частном случае $l = a$ получим $\pi \approx 2\bar{N}/N$, т.е. оценку трансцендентного числа π рациональным числом. Отметим, что для получения трех верных знаков числа π по методу Бюффона нужно примерно 10^4 бросаний. Поэтому с практической точки зрения метод Бюффона малопривлекателен. Однако сама возможность оценки путем проведения статистических испытаний привлекла внимание к работе Ж.Л.Л. Бюффона, и даже появился термин „игла Бюффона“.

Итак, составной частью метода статистических испытаний является моделирование (говорят также о „разыгрывании“) случайных величин. Проще всего моделировать *одномерную непрерывную случайную величину* X , равномерно распределенную на некотором отрезке $[a, b]$ и имеющую *плотность распределения вероятностей* [XVI]

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (4.33)$$

Равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$ случайную величину X можно моделировать аналогично „игле Бюффона“, бросая точку на лист бумаги, разграфленный параллельными линиями с шагом 1. Однако, во-первых, этот способ нельзя использовать в компьютерных вычислениях, а во-вторых, нет гарантии, что при бросании возможные положения случайной точки равновероятны. Поэтому на практике для моделирования равномерно распределенных случайных величин используют алгоритмический способ генерации на компьютере *псевдослучайных чисел*. В табл. 4.1 приведены первые 30 таких чисел, полученных по формуле $r_n = 10^{-10} z_n$, $n = \overline{1, 30}$, где $z_n \stackrel{m}{=} Az_{n-1}$,

Таблица 4.1

n	z_n	n	z_n	n	z_n
1	0,6049270367	11	0,6956902556	21	0,7531391389
2	0,5184511120	12	0,1126290699	22	0,1733065296
3	0,6665535727	13	0,2448731491	23	0,1728751589
4	0,3569329660	14	0,0495253020	24	0,0345180076
5	0,3673940252	15	0,6787808067	25	0,9043107612
6	0,5046996355	16	0,1170111628	26	0,7890546151
7	0,4776453995	17	0,4673165634	27	0,8286741394
8	0,9728847466	18	0,0582941814	28	0,8999650040
9	0,3933189141	19	0,5930217271	29	0,2002926951
10	0,0713648160	20	0,9517789780	30	0,8703832609

$A = 100003$, $z_0 = 123456789$, $m = 10^{10}$, а символ $\overset{m}{\equiv}$ означает, что z_n равно остатку от деления Az_{n-1} на m . Например,

$$Az_0 = 100003 \cdot 123456789 = 12346049270367 \overset{10^{10}}{=} 6049270367,$$

откуда $z_1 = 6049270367$ и $r_1 = 0,6049270367$.

При фиксированных значениях A , z_0 и m числа r_n предопределены и не являются „истинно случайными“. Поэтому их и называют псевдослучайными. Начиная с некоторого номера псевдослучайные числа начнут повторяться, так как существует конечный набор остатков при делении на фиксированное число m . Параметры A , z_0 и m стараются выбрать так, чтобы повторение в последовательности псевдослучайных чисел случилось как можно позже. Например, при выбранных выше значениях A , z_0 и m равенство $z_n = z_0$ имеет место при $n \geq 5 \cdot 10^8$ [XX].

Моделирование равномерно распределенных случайных величин позволяет моделировать и любые другие случайные величины. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Для того чтобы построить случайную величину Y с функцией распределения вероятностей $F(x)$, достаточно рассмотреть случайную величину $Y = F^{-1}(X)$, где $F^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $F(x)$.

Таким образом, если $\{r_n\}$ — последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$, то последовательность псевдослучайных чисел $\{x_n\}$ с функцией распределения $F(x)$ можно получить, решая уравнения $F(x_n) = r_n$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ имеем $x_n = a + (b - a)r_n$.

Рассмотрим применение метода статистических испытаний к вычислению определенного интеграла. Существует несколько вариантов применения этого метода.

Один из простейших вариантов связан с вычислением среднего значения подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a, b]$. Искомый интеграл можно представить в

виде

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_a^b f(x)p(x) dx = (b-a)Mf(X),$$

где $Mf(X)$ — математическое ожидание функции $f(X)$ случайной величины X , имеющей плотность распределения $p(x) = \frac{1}{b-a}$. Оценивая математическое ожидание случайной величины $f(X)$ средним значением ее выборки $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ объема N , полученной с помощью последовательности $\{x_i\}$ псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$, приходим к приближенной формуле

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = I_N^*. \quad (4.34)$$

Чтобы оценить точность этой приближенной формулы, необходимо построить *доверительный интервал* для параметра $Mf(X)$. Здесь можно использовать *центральную предельную теорему*, согласно которой при достаточно больших значениях N (практически при $N > 10$) случайная величина

$$Z_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^N f(x_n) - NMf(X) \right) = \frac{\sqrt{N}}{\sigma} (I_N^* - Mf(X))$$

приближенно распределена по стандартному нормальному закону. Здесь $\sigma = Df(X)$ — среднее квадратичное отклонение случайной величины $f(X)$, а $Df(X)$ — дисперсия этой случайной величины, которая в данном случае равна

$$Df(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx - (Mf(X))^2.$$

Согласно этой формуле, для определения дисперсии $Df(X)$ необходимо вычислить не только искомый интеграл, но и интеграл от квадрата рассматриваемой функции. Значит, истинное значение дисперсии не известно, и вместо нее необходимо использовать какую-либо оценку, например *выборочную дисперсию*

$$\begin{aligned} D_{\text{в}}f(X) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^2(x_n) - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=1}^N f(x_n) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^2(x_n) - (I_N^*)^2 \end{aligned}$$

или же *исправленную выборочную дисперсию*

$$D_{\text{и}}f(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N f^2(x_n) - \frac{N}{N-1} (I_N^*)^2. \quad (4.35)$$

Предполагая, что случайная величина Z_N имеет стандартное нормальное распределение, заключаем, что неравенство $|Z_N| < \varepsilon$ выполняется с вероятностью $\Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi_0(\varepsilon)$, где $\Phi(x)$ — функция распределения для стандартного нормального закона, а $\Phi_0(x)$ — *интеграл Лапласа*, вычисляемый по формуле

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2/2} d\tau$$

(значения интеграла Лапласа табулированы [XVI]). Минимальное число N_* испытаний, при котором с заданной вероятностью p_* (*уровнем доверия*) абсолютная погрешность $|I - I_N^*|$ не превысит Δ_* , можно получить, решая систему уравнений

$$\Phi_0(t) = \frac{p_*}{2}, \quad t = \frac{\Delta_*}{\sigma} \sqrt{N_*}. \quad (4.36)$$

Из первого уравнения находим значение t , а затем определяем требуемое значение N_* из равенства

$$N_* = \left(\frac{t}{\Delta_*}\right)^2 \sigma^2. \quad (4.37)$$

Пример 4.3. Используя приближенную формулу (4.34), найдем оценку I^* значения интеграла от функции $f(x) = x + 1$ по отрезку $[1, 3]$, а также абсолютную погрешность $\Delta = |I - I^*|$ и минимальное число N_* испытаний, которое с уровнем доверия $p_* = 0,95$ обеспечит верхнюю границу погрешности $\Delta^* = 0,1$.

Остановимся на сравнительно небольшом числе испытаний $N = 10$ и с точностью до трех знаков после запятой возьмем из табл. 4.1 первые 10 псевдослучайных чисел r_n (табл. 4.2).

Таблица 4.2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_n	0,605	0,518	0,667	0,357	0,367	0,505	0,478	0,973	0,393	0,071
x_n	2,210	2,036	2,334	1,714	1,734	2,010	1,956	2,946	1,786	1,142
$f(x_n)$	3,210	3,036	3,334	2,714	2,734	3,010	2,956	3,946	2,786	2,142

Затем вычислим $x_n = a + (b - a)r_n = 1 + 2r_n$ и $f(x_n) = x_n + 1$. Далее в соответствии с (4.34) найдем

$$I^* = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{2}{10} 29,868 \approx 5,974.$$

Непосредственное вычисление дает

$$I = \int_1^3 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_1^3 = 6.$$

Таким образом, $\Delta = |I - I^*| \approx 0,026$.

Так как в нашем случае $N \leq 30$, то лучше использовать исправленную выборочную дисперсию. По формуле (4.35) находим $D_n f(X) \approx 0,223$. Отметим, что усредняемая случайная

величина $f(X) = X + 1$ линейна на отрезке $[a, b]$ и равномерно распределена на этом отрезке. Поэтому ее дисперсию можно найти по формуле [XVI]

$$Df(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

что заметно отличается от значения исправленной дисперсии. Для значения $p_* = 0,95$ из уравнения $\Phi_0(t) = p_*/2 = 0,475$ по таблице значений интеграла Лапласа находим $t = 1,96$ и затем при $\sigma^2 = D_{\text{ис}}f(X)$ из (4.37) вычисляем

$$N_* = \left(\frac{t}{\Delta_*}\right)^2 \sigma^2 = \left(\frac{1,96}{0,1}\right)^2 \cdot 0,223 = 86.$$

Подстановка в эту формулу значения $\sigma^2 = Df(X)$ даст минимальное число испытаний $N_* = 128$. Обе оценки показывают, что реализованное выше число испытаний $N = 10$ мало для достижения надежного результата, а сравнительно небольшую погрешность $\Delta \approx 0,026$ следует расценивать как благоприятную случайность. При $N = 10$ в соответствии с (4.37) можно ожидать, что с вероятностью $p_* = 0,95$ наибольшая погрешность вычисления интеграла I не превысит значения $\Delta^* = t\sqrt{\sigma^2/N} = 1,96\sqrt{(1/3)/10} \approx 0,358$. #

Как показано в примере 4.3, оценка наибольшей возможной погрешности Δ_* вычисления интеграла методом Монте-Карло при числе испытаний N может быть найдена лишь с некоторой вероятностью. Известно, что достаточно близкой к единице вероятности $p_* = 0,997$ соответствует решение уравнения (4.36) $t = 3$. В этом случае из (4.36) следует оценка для наибольшей абсолютной погрешности

$$\Delta_* = t \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (4.38)$$

Эта оценка, иногда называемая правилом „трех сигм“, показывает, что возможная погрешность уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из числа испытаний.

Перейдем к рассмотрению еще одного способа применения метода Монте-Карло. Этот способ основан на геометрической интерпретации значения интеграла как площади криволинейной трапеции. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ в (4.34) является ограниченной и неотрицательной, причем $0 \leq f(x) \leq c$, $x \in [a, b]$. Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y) , имеющую равномерное распределение в прямоугольнике

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in [0, c]\}.$$

В соответствии с геометрическим определением вероятности вероятность того, что точка (X, Y) попадет в криволинейную трапецию, сверху ограниченную графиком функции $y = f(x)$, равна отношению площади этой трапеции к площади прямоугольника D . Это дает следующую оценку интеграла:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c \frac{b-a}{N} N_1 = I_*, \quad (4.39)$$

где N_1 — число элементов выборки $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ объема N для случайной величины (X, Y) , оказавшихся под графиком функции $y = f(x)$ (рис. 4.12).

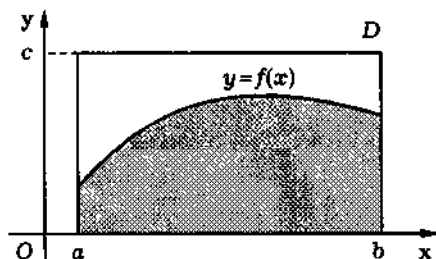


Рис. 4.12

Пример 4.4. Используем формулу (4.39), чтобы оценить значение интеграла от функции $f(x) = x + 1$ по отрезку $[1, 3]$

(см. пример 4.3). Ясно, что $f(x) \leq f(3) = 4$, поэтому примем $c = 4$. Из табл. 4.1 с точностью до трех знаков после запятой возьмем первые 20 псевдослучайных чисел $r_{2n-1}, r_{2n}, n = \overline{1, N}$, $N = 10$, и найдем координаты $x_n = a + (b - a)r_{2n-1} = 1 + 2r_{2n-1}$, $y_n = cr_{2n} = 4r_{2n}$ псевдослучайных точек $(x_n; y_n)$ и значения $f(x_n) = x_n + 1$ (табл. 4.3).

Таблица 4.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_{2n-1}	0,605	0,667	0,367	0,478	0,393	0,696	0,245	0,679	0,467	0,593
r_{2n}	0,518	0,357	0,505	0,973	0,071	0,113	0,050	0,117	0,058	0,952
x_n	2,210	2,334	1,734	1,956	1,786	2,392	1,490	2,358	1,934	2,186
y_n	2,072	1,428	2,020	3,892	0,284	0,452	0,200	0,468	0,232	3,808
$f(x_n)$	3,210	3,334	2,734	2,956	2,786	3,392	2,490	3,358	2,934	3,186
β_n	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Если $y_n < f(x_n) = x_n + 1$, то для данного значения n в последней строке табл. 4.3 ставим $\beta_n = 1$, а в противном случае $\beta_n = 0$. Сумма единиц в этой строке дает значение $N_1 = 7$ и в соответствии с (4.39) получаем

$$I_* = c \frac{b-a}{N} N_1 = 4 \frac{3-1}{10} 7 = 5,6.$$

Учитывая точное значение $I = 6$, находим абсолютную погрешность $|I - I_*| = 0,4$. При том же числе $N = 10$ испытаний результат оказался существенно грубее, чем в примере 4.3.

4.5. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло

Два способа вычисления определенного интеграла с применением метода Монте-Карло (см. 4.4) нетрудно обобщить на кратные интегралы. Пусть требуется вычислить m -кратный

интеграл

$$I = \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (4.40)$$

от функции $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, по замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^m$. Обобщим первый из рассмотренных в 4.4 способов вычисления определенного интеграла.

Погрузим область D в m -мерный промежуток $D^* = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$, имеющий меру

$$\mu(D^*) = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j).$$

Определим в этом промежутке функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D; \\ 0, & x \in D^* \setminus D. \end{cases} \quad (4.41)$$

Тогда в соответствии с (4.40) получим

$$I = \int \cdots \int_{D^*} g(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m. \quad (4.42)$$

Рассмотрев m -мерную случайную величину X , имеющую в замкнутой области D^* равномерное распределение вероятностей с плотностью $p(x) = \frac{1}{\mu(D^*)}$, интеграл I можно представить в виде

$$I = \int \cdots \int_X g(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \mu(D^*) \mathbf{M}g(X), \quad (4.43)$$

где $\mathbf{M}g(X)$ — математическое ожидание функции $g(X)$ случайной величины X . Оценивая $\mathbf{M}g(X)$ средним выборочным,

полученным по выборке случайной величины, приходим к приближенной формуле, аналогичной (4.34):

$$I \approx \frac{\mu(D^*)}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)}) = I^*, \quad (4.44)$$

где $x^{(n)} \in D^*$ — значения случайной величины X в n -м испытании.

Чтобы смоделировать выборку m -мерной случайной величины X , равномерно распределенной в m -мерном промежутке D^* , можно использовать псевдослучайные числа. Для этого в каждом испытании с номером n выбирают m псевдослучайных чисел $r_i^{(n)}$, $i = \overline{1, m}$, и по ним определяют координаты $x_i^{(n)} = a_i + (b_i - a_i)r_i^{(n)}$, $i = \overline{1, m}$, псевдослучайной точки $x^{(n)}$.

Пример 4.5. Найдем оценку значения двойного интеграла

$$I = \int_D (x_1 + x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} (x_1 + x_2) dx_1$$

при числе испытаний $N = 10$. Область интегрирования D функции $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ограничена прямыми $x_2 = 0$, $x_2 = x_1$ и $x_1 = 1$, т.е. является треугольником (рис. 4.13). Погрузим D в квадрат D^* , ограниченный координатными осями и прямыми $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, мера (площадь) которого $\mu(D^*) = 1$. Определим в D^* функцию

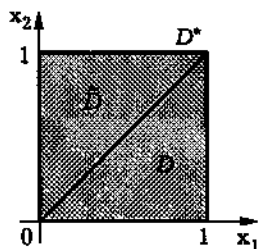


Рис. 4.13

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & (x_1; x_2) \in D; \\ 0, & (x_1; x_2) \in D^* \setminus D. \end{cases} \quad (4.45)$$

Из табл. 4.1 возьмем первые 20 псевдослучайных чисел r_{2n-1} , r_{2n} , $n = \overline{1, N}$, $N = 10$, равномерно распределенных на

отрезке $[0, 1]$. При этом ограничимся точностью три знака после запятой. Выбранные числа определяют координаты $x_1^{(n)} = r_{2n-1}$ и $x_2^{(n)} = r_{2n}$ случайных точек $x^{(n)} \in D^*$ (табл. 4.4).

Таблица 4.4

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(n)}$	0,605	0,667	0,367	0,478	0,393	0,696	0,245	0,679	0,467	0,593
$x_2^{(n)}$	0,518	0,357	0,505	0,973	0,071	0,113	0,050	0,117	0,058	0,952
g_n	1,123	1,024	0	0	0,464	0,809	0,295	0,796	0,525	0
\tilde{g}_n	0	0	0,872	1,451	0	0	0	0	0	1,545

Учитывая, что $x^{(n)} \in D$ при выполнении условия $x_2^{(n)} < x_1^{(n)}$, и используя (4.45), вычисляем $g_n = g(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ и при помощи (4.44) находим

$$I^* = \frac{\mu(D^*)}{N} \sum_{n=1}^N g_n = \frac{1}{10} \cdot 5,036 \approx 0,504.$$

Сравним I^* с точным значением рассматриваемого интеграла

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} (x_1 + x_2) dx_1 = \int_0^1 \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right) \Big|_{x=0}^{x=x_2} dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} y^2 + y \right) dy = \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Абсолютная погрешность равна $\Delta = |I - I^*| \approx 0,004$.

Чтобы не создавать иллюзии, что при небольшом числе испытаний метод Монте-Карло обеспечивает высокую точность

вычисления интегралов, найдем значение интеграла-„близнеца“

$$\tilde{I} = \int_{\tilde{D}} (x_1 + x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_2 \int_{x_2}^1 (x_1 + x_2) dx_1 = \frac{1}{2},$$

отличие которого от I состоит лишь в том, что его область \tilde{D} интегрирования является дополнением области D до квадрата D^* (см. рис. 4.13). Вместо (4.45) имеем

$$\tilde{g}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & (x_1; x_2) \in \tilde{D}; \\ 0, & (x_1; x_2) \in D^* \setminus \tilde{D}, \end{cases}$$

причем теперь случайная точка $x^{(n)} = (x_1^{(n)}; x_2^{(n)}) \in \tilde{D}$ при выполнении условия $x_1^{(n)} < x_2^{(n)}$. В табл. 4.4 представлены значения $\tilde{g}_n = \tilde{g}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$, подстановка которых в (4.44) дает

$$\tilde{I}^* = \frac{\mu(D^*)}{N} \sum_{n=1}^N g_n = \frac{1}{10} \cdot 3,868 \approx 0,387$$

с абсолютной погрешностью $\tilde{\Delta} = |\tilde{I} - \tilde{I}^*| \approx 0,113$, т.е. относительная погрешность составляет более 22%.

Оценим минимальное количество испытаний, при котором с уровнем доверия $p_* = 0,95$ погрешность вычисления интеграла не превышает $\Delta_* = 0,01$. С помощью формулы (4.35) для случайной величины $g(X)$ находим исправленную выборочную дисперсию $D_{ng}(X) \approx 0,182$. Уравнение $\Phi_0(t) = p_*/2$ при заданном уровне доверия p_* имеет решение $t = 1,96$. Считая, что $\sigma^2 = D_{ng}(X)$, в соответствии с формулой (4.37) получаем минимальное число испытаний $N_* = 6992$. При первоначально выбранном количестве испытаний $N = 10$ с тем же уровнем доверия можно лишь ожидать, что наибольшая абсолютная погрешность не превысит $\Delta^* = t\sqrt{\sigma^2/N} \approx 0,264$, а это составляет

более 50 % точного значения вычисляемого интеграла. Так что полученную выше погрешность $\Delta \approx 0,004$ следует расценивать как исключительно благоприятную случайность.

Аналогично для случайной функции $\tilde{g}(X)$ найдем исправленную дисперсию $D_n \tilde{g}(X) \approx 0,417$ и минимальное число испытаний $N_* = 16020$, обеспечивающих с вероятностью $p_* = 0,95$ ту же наибольшую погрешность $\Delta_* = 0,01$. При $N = 10$ с той же вероятностью можно ожидать, что наибольшая погрешность не превысит $\Delta^* = t \sqrt{\sigma^2/N} \approx 0,400$. #

Сравнение результатов вычисления определенного интеграла методом Монте-Карло и при помощи *квadrатурных формул* показывает, что при одинаковом объеме вычислений метод Монте-Карло оказывается менее точным, а при одинаковой точности использует большее число вычисляемых значений интегрируемой функции, т.е. требуемое число испытаний N превышает количество *узлов квадратурной формулы*. Но для m -кратного интеграла от функции m переменных по мере роста m ситуация меняется. Дело в том, что необходимое для обеспечения заданной точности Δ_* в соответствии с (4.38) число испытаний N пропорционально $1/\Delta_*^2$ и непосредственно не зависит от m , тогда как для *кубатурной формулы* с порядком точности p число узлов по каждому переменному пропорционально $1/d_*^{1/p}$, а общее число узлов, в которых необходимо вычислить значение интегрируемой функции, пропорционально $1/\Delta_*^{m/p}$. Отсюда следует, что при $m > 2p$ применение кубатурной формулы требует большего объема вычислений по сравнению с методом Монте-Карло.

Если интегрируемая функция дважды непрерывно дифференцируема в области интегрирования, то рассмотренные выше (см. 4.1–4.3) наиболее удобные формулы имеют $p = 2$. В этом случае применение метода Монте-Карло при $m \geq 5$ выгоднее использования кубатурных формул. Часто в прикладных задачах приходится интегрировать негладкие функции, и кубатурные формулы могут обеспечить лишь первый порядок точности.

Тогда метод Монте-Карло будет экономичнее уже при вычислении тройных интегралов.

Отметим, что проведенное сравнение предполагает независимость испытаний в методе Монте-Карло, т.е. элементы последовательности псевдослучайных чисел повторяются не ранее чем через mN номеров. Кроме того, при сравнении надо учитывать, что с ростом m может заметно увеличиться дисперсия. Вместе с тем известны способы, позволяющие при применении метода Монте-Карло уменьшить дисперсию*.

Вопросы и задачи

4.1. Показать, что приближенная формула (4.8) для вычисления двойного интеграла имеет второй порядок точности, если подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема в замкнутом прямоугольнике D .

4.2. Вывести приближенную формулу (4.10) для вычисления тройного интеграла и установить, что она имеет второй порядок точности, если подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема в замкнутом прямоугольном параллелепипеде Ω .

4.3. С помощью формулы средних получить приближенную формулу, позволяющую вычислить тройной интеграл по области $D^* = \{(r; \varphi; z): r \in [R_0, R], \varphi \in [0, \pi], z \in [0, H]\}$ от функции $f(r, \varphi, z)$, заданной в цилиндрической системе координат $O r \varphi z$.

* См.: *Калиткин Н.Н.*, а также *Соболь И.М.*

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Криволинейный интеграл первого рода

Используя понятие *длины кривой*, а также формулы для ее вычисления при различных способах задания кривой [VI], можно ввести понятие интеграла вдоль спрямляемой (в частности, гладкой или кусочно гладкой) кривой так же, как вдоль прямолинейного отрезка.

Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 с прямоугольной декартовой системой координат Oxy имеется непрерывная спрямляемая кривая AB (рис. 5.1), в точках которой задана действительная функция $f(M) = f(x, y)$. Выберем разбиение $T = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ кривой AB с точками деления $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$. Длины элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ обозначим через Δs_i , а максимальную из этих длин — через $\lambda = \lambda(T)$. Возьмем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ по точке $M_i(x_i; y_i)$.

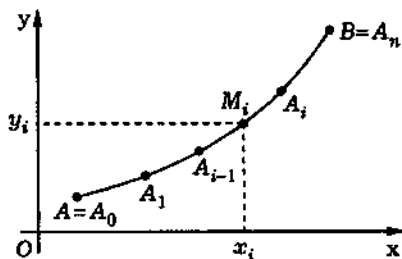


Рис. 5.1

Отметим, что подобное разбиение можно построить и в случае замкнутой кривой, если за точку A_0 , совпадающую в этом случае с A_n , взять любую точку кривой AB , а остальные точки $A_i, i = \overline{1, n-1}$, расположить в соответствии с выбранным направлением на этой замкнутой кривой.

Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i, \quad (5.1)$$

которую называют интегральной суммой функции $f(x, y)$ вдоль кривой AB .

Пусть существует предел I интегральных сумм (5.1) при $\lambda(T) \rightarrow 0$, не зависящий ни от выбора разбиения кривой AB , ни от выбора точек M_i на элементарных дугах, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого разбиения $T = \{A_0, \dots, A_n\}$ кривой AB с параметром $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ при любом выборе точек M_i на дугах $A_{i-1}A_i$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i - I \right| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Такой предел называют **криволинейным интегралом первого рода** (иногда — первого типа) вдоль кривой (или дуги) AB и обозначают

$$I = \int_{AB} f(x, y) ds.$$

Итак,

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i. \quad (5.3)$$

Отметим, что в определении криволинейного интеграла первого рода направление обхода кривой не играет никакой роли, так как от выбора направления не зависит интегральная сумма. Пусть, например, кривая AB не замкнута, а BA обозначает ту же кривую, но с противоположным направлением обхода (от

B к A , если исходным является направление от A к B). Тогда можно записать

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds. \quad (5.4)$$

Аналогично можно ввести понятие интеграла вдоль пространственной кривой. Пусть на пространственной кривой AB задана функция $f(x, y, z)$ (рис. 5.2). Как и в плоском случае, проведем разбиение $T = \{A_0, \dots, A_n\}$ кривой AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$. На каждой дуге $A_{i-1}A_i, i = \overline{1, n}$, выберем точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Составив интегральную сумму и перейдя к пределу при $\lambda(T) \rightarrow 0$, получим значение интеграла вдоль пространственной кривой AB :

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i, \quad (5.5)$$

где Δs_i — длина элементарной дуги $A_{i-1}A_i$, а $\lambda(T)$ — максимальная из длин Δs_i .

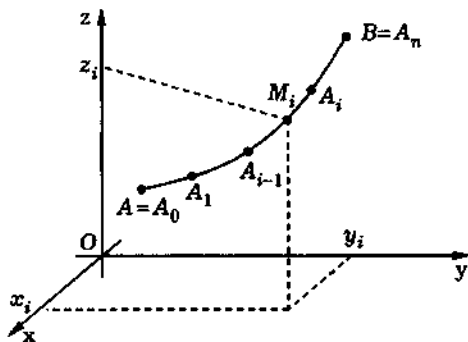


Рис. 5.2

5.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Если плоская кривая AB спрямляема, можно ввести *натуральный параметр* s этой кривой. В этом случае положение точки M на кривой будет определяться длиной дуги AM кривой от *начальной точки* A до точки M . Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leq s \leq s_{AB},$$

где s_{AB} — длина кривой AB . Тогда функцию $f(x, y)$, определенную на кривой AB , можно рассматривать как сложную функцию $f(x(s), y(s))$ натурального параметра s .

Выберем разбиение $T = \{A_0, \dots, A_n\}$ кривой AB и точки $M_i(x_i, y_i)$ на элементарных дугах $A_{i-1}A_i$ этого разбиения. Составим соответствующую интегральную сумму. Пусть s_i есть значение натурального параметра для точки A_i , $i = \overline{0, n}$, а \tilde{s}_i — значение натурального параметра для точки M_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда длины Δs_i элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ можно записать в виде $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, а интегральную сумму представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x(\tilde{s}_i), y(\tilde{s}_i)) \Delta s_i.$$

Правая часть равенства есть интегральная сумма, соответствующая определенному интегралу [VI] от функции $f(x(s), y(s))$ по отрезку $[0, s_{AB}]$. Переход к пределу в обеих интегральных суммах выполняется при одном условии $\lambda(T) = \max_{i=1, n} \Delta s_i \rightarrow 0$. Поэтому

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_0^{s_{AB}} f(x(s), y(s)) ds, \quad (5.6)$$

причем существование одного из интегралов в этом равенстве означает существование и другого.

Выявленная связь позволяет получить условия существования криволинейного интеграла первого рода. Если кривая AB спрямляема, а функция $f(x, y)$ непрерывна на этой кривой (часто говорят — непрерывна вдоль кривой AB), то сложная функция $f(x(s), y(s))$ непрерывна на отрезке $[0, s_{AB}]$, так как функции $x(s)$ и $y(s)$ параметрического представления кривой являются непрерывными на отрезке $[0, s_{AB}]$. Следовательно, интеграл в правой части (5.6) существует [VI]. Резюмируя, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.1. Если кривая AB спрямляема (в частности, является кусочно гладкой), а функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль этой кривой, то криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ вдоль кривой AB существует. #

Итак, криволинейный интеграл первого рода можно свести к определенному интегралу с помощью формулы (5.6). Однако эта формула с практической точки зрения не очень удобна, поскольку в качестве параметра кривой далеко не всегда (а точнее, редко) выбирают натуральный параметр.

Пусть кривая AB задана произвольными параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (5.7)$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая AB спрямляема и для нее определен натуральный параметр s . Натуральный параметр можно отсчитывать от любого конца кривой и в данном случае отсчет удобно вести от начальной точки кривой, соответствующей значению $t = \alpha$. Тогда возрастанию параметра t будет соответствовать возрастание параметра s , а для дифференциала длины дуги плоской кривой будет выполняться

равенство

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (5.8)$$

При этом значение $t = \alpha$ соответствует точке A и значению $s = 0$, а значение $t = \beta$ — точке B и значению $s = s_{AB}$. В определенном интеграле в равенстве (5.6) справа можно выполнить замену переменного, переходя от натурального параметра s к параметру t . В результате указанное равенство преобразуется к виду

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (5.9)$$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода следует заменить в подынтегральной функции переменные x и y их выражениями через параметр t , а дифференциал ds — дифференциалом длины дуги, выразив его через параметр t . Оговоренное выше согласование параметра t и натурального параметра s означает, что в определенном интеграле в (5.9) справа нижний предел интегрирования меньше верхнего, т.е. $\alpha < \beta$.

Если плоская кривая AB является графиком функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то в качестве параметра кривой естественно выбрать абсциссу x точки кривой. При этом формула (5.9) приобретает вид

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (5.10)$$

Аналогично при задании кривой функцией в виде $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, получаем

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (5.11)$$

Пусть кривая AB задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда, учитывая формулы $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$ связи декартовых и полярных координат, а также выражение для дифференциала длины дуги в полярных координатах [II]

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi,$$

находим

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (5.12)$$

Пример 5.1. Вычислим криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} \frac{y}{x} ds,$$

где AB — дуга параболы $y = x^2/2$, заключенная между точками $A(1; 1/2)$ и $B(2; 2)$. В данном случае

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + x^2} dx$$

и в соответствии с (5.10)

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{y}{x} ds &= \frac{1}{2} \int_1^2 x \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \sqrt{1 + x^2} d(1 + x^2) = \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{(1 + x^2)^3} \Big|_1^2 = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Пример 5.2. Найдём криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} ye^{-x} ds$$

вдоль кривой AB , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = 2 \operatorname{arctg} t - t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

В соответствии с (5.8) имеем

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} + 1 - \frac{4}{1+t^2}} dt = dt. \end{aligned}$$

Кроме того, $e^{-x} = 1/(1+t^2)$. Следовательно, используя (5.9), получаем

$$\begin{aligned} \int_{AB} ye^{-x} ds &= \int_0^1 (2 \operatorname{arctg} t - t) \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \operatorname{arctg}^2 t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.3. Вычислим криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y) = x^{4/3} + y^{4/3}$ вдоль замкнутой кривой L , заданной уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроиды).

Для вычисления интеграла необходимо кривую задать параметрическими уравнениями. Астроиду можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Находим $x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$ и $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$. Следовательно, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$. Отметим, что правая часть последнего равенства обращается в нуль в четырех точках, соответствующих значениям $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ и $t = 3\pi/2$, т.е. астроида является кусочно гладкой кривой.

Переходя от криволинейного интеграла к определенному, получаем

$$\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) ds = \int_0^{2\pi} a^{4/3} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a |\cos t \sin t| dt.$$

Функция под знаком определенного интеграла справа является периодической с периодом $\pi/2$. Поэтому интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ можно заменить учетверенным интегралом по отрезку $[0, \pi/2]$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) ds &= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t) dt = \\ &= 2a^{7/3} (-\cos^6 t + \sin^6 t) \Big|_0^{\pi/2} = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

Пример 5.4. Найдем криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + 5}$ вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $A(0; 0)$ и $B(1; 2)$.

Уравнение этой прямой имеет вид $y = 2x$, и для вычисления криволинейного интеграла можно использовать формулу (5.10). В данном случае $\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{5}$. Используя в определенном интеграле замену переменного $u = x + 2$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 5}} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{x^2 + 4x^2 + 5}} = \sqrt{5} \int_2^3 \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \\ &= \sqrt{5} \ln |u + \sqrt{1 + u^2}| \Big|_2^3 = \sqrt{5} \ln \frac{3 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Пример 5.5. Пусть L — правый лепесток лемнискаты Бернулли, который в полярных координатах описывается урав-

нением $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Вычислим вдоль L криволинейный интеграл от функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, то $r'(\varphi) = -a \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и

$$r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 = a^2 \cos 2\varphi + a^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Учитывая, что в данном случае $\sqrt{x^2 + y^2} = r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, и используя (5.12), находим

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{\pi}{2} a^2. \quad \#$$

Условия существования криволинейного интеграла переносятся и на пространственный случай. Если пространственная кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ вместе со своими производными, а функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна на кривой AB , то криволинейный интеграл от функции $f(x, y, z)$ вдоль кривой AB существует, причем

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(x, y, z) ds &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Пример 5.6. Вычислим криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} xyz \, ds$$

вдоль пространственной кривой AB , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2/2, \\ z = \sqrt{8t^3}/3, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Предварительно находим

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{1 + t^2 + 2t} dt = (1 + t) dt.$$

Далее в соответствии с формулой (5.13) получаем

$$\int_{AB} xyz \, ds = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{9/2} (1 + t) dt = \frac{16}{143} \sqrt{2}. \quad \#$$

В заключение отметим следующее. Так как криволинейный интеграл первого рода, согласно формуле (5.6), фактически есть определенный интеграл, на него переносятся основные свойства определенного интеграла: линейность, аддитивность, оценка интеграла по модулю (модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции), теорема о среднем. Последняя позволяет ввести понятие среднего значения функции $f(x, y, z)$ вдоль кривой AB , под которым понимают отношение криволинейного интеграла от $f(x, y, z)$ вдоль AB к длине кривой AB . В то же время понятия верхнего и нижнего пределов интегрирования, присущие определенному интегралу, не имеют аналогов для криволинейного интеграла, а известное свойство определенного интеграла менять знак, когда верхний и нижний пределы меняются местами, не распространяется на криволинейный интеграл первого рода.

5.3. Механические приложения криволинейного интеграла первого рода

Масса материальной кривой. Пусть функция $\rho(M)$, определенная на кривой AB , задает линейную плотность распределения массы вдоль этой кривой [VI]. При мелком разбиении кривой AB (см. рис. 5.1) на большое число $n \in \mathbb{N}$ элементарных дуг $A_{i-1}A_i$, $i = \overline{1, n}$, можно приближенно принять, что линейная плотность распределения массы во всех точках каждой элементарной дуги $A_{i-1}A_i$ постоянна и равна значению $\rho(M_i)$ линейной плотности в произвольной точке $M_i(x_i; y_i)$ этой дуги. Обозначив через Δs_i длину элементарной дуги $A_{i-1}A_i$, для массы этой дуги будем иметь

$$m_i \approx \rho(M_i) \Delta s_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

В этом случае для массы m всей кривой AB получим

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta s_i.$$

Погрешность этого приближенного равенства тем меньше, чем мельче разбиение кривой AB на элементарные дуги, т.е. чем меньше длины Δs_i всех элементарных дуг. Поэтому естественно за массу кривой AB принять значение предела

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta s_i,$$

где $\lambda = \max_{i=\overline{1, n}} \Delta s_i$ — наибольшая из длин Δs_i элементарных дуг.

Сравнивая данное определение массы кривой с определением криволинейного интеграла первого рода, получаем

$$m = \int_{AB} \rho(M) ds = \int_{AB} \rho(x, y) ds. \quad (5.14)$$

В случае пространственной кривой AB для ее массы верна аналогичная формула

$$m = \int_{AB} \rho(M) ds = \int_{AB} \rho(x, y, z) ds. \quad (5.15)$$

Моменты инерции, статические моменты материальной кривой и координаты ее центра масс. Моменты инерции для материальной кривой вводят так же, как и для неоднородного тела или пластины.

Пусть для материальной пространственной кривой AB задана ее линейная плотность $\rho(x, y, z)$. Разделим кривую AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$ с длинами Δs_i . Будем предполагать, что это разбиение настолько мелкое, что плотность в пределах одной элементарной дуги можно приближенно считать постоянной. В этом случае каждую элементарную дугу $A_{i-1}A_i$ можно заменить материальной точкой $M_i(x_i; y_i; z_i) \in A_{i-1}A_i$, в которой сосредоточена вся масса $\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$ этой дуги (см. рис. 5.2). Суммируя массы по всем элементарным дугам, для материальной кривой AB можем приближенно принять, что

$$J_{Oz} \approx \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i,$$

$$J_{yOz} \approx \sum_{i=1}^n x_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i,$$

$$J_{xOz} \approx \sum_{i=1}^n y_i^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

В качестве точного значения этих моментов инерции естественно взять предел правых частей равенств при $\lambda = \max_i \Delta s_i \rightarrow 0$. Это приводит к записи моментов инерции через криволинейные

интегралы:

$$\begin{cases} J_{Oz} = \int_{AB} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds, \\ J_{yOz} = \int_{AB} x^2 \rho(x, y, z) ds, \\ J_{xOz} = \int_{AB} y^2 \rho(x, y, z) ds. \end{cases} \quad (5.16)$$

Аналогичным образом можно получить выражения для моментов инерции кривой относительно координатных осей Ox , Oy и координатной плоскости xOy .

Для плоской кривой AB в координатной плоскости xOy с линейной плотностью $\rho(x, y)$ момент инерции J_{Oz} относительно оси Oz обычно называют полярным моментом инерции и обозначают J_O . Моменты инерции относительно осей Oy и Ox совпадают с моментами инерции относительно плоскостей xOz и yOz , и их обозначают через J_y и J_x .

Формулы для координат K_x , K_y , K_z вектора *статического момента* материальной кривой можно получить, проводя те же рассуждения, в которых кривая заменяется системой конечного числа материальных точек, а затем выполняется переход к пределу. Эти формулы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} K_x = \int_{AB} x \rho(x, y, z) ds, \\ K_y = \int_{AB} y \rho(x, y, z) ds, \\ K_z = \int_{AB} z \rho(x, y, z) ds. \end{cases} \quad (5.17)$$

Координаты вектора статического момента часто называют статическими моментами относительно координатных плоскостей yOz , xOz и xOy .

Вектор статического момента, как и в случае неоднородного тела, позволяет вычислить координаты центра масс материальной кривой:

$$x_C = \frac{K_x}{m}, \quad y_C = \frac{K_y}{m}, \quad z_C = \frac{K_z}{m}. \quad (5.18)$$

Отметим, что центр масс кривой не обязательно является точкой этой кривой: например, центр масс окружности расположен в плоскости этой окружности внутри нее, но не на самой окружности.

В случае плоской кривой AB , лежащей в координатной плоскости xOy , координата K_z вектора статического момента равна нулю и $z_C = 0$, а в формулах (5.17) для координат K_x и K_y линейная плотность $\rho(x, y)$ не будет зависеть от координаты z . В этом случае K_x и K_y часто называют статическими моментами относительно осей Oy и Ox .

Пример 5.7. Вычислим геометрический момент инерции J окружности L радиуса a относительно оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через ее центр.

Для геометрического момента инерции линейная плотность постоянна: $\rho \equiv 1$. Отметим, что выбор оси не является однозначным, но значение момента инерции от выбора оси не зависит. Это ясно из соображений симметрии, но вытекает также и из дальнейших рассуждений.

Выберем прямоугольную систему координат Oxy в плоскости окружности так, что начало координат будет совпадать с центром окружности, а ось инерции — с координатной осью Ox . Тогда окружность L будет описываться уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. Перейдем к параметрическому представлению окружности:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

В этом случае для дифференциала дуги ds получаем

$$ds^2 = ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt^2 = (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t) dt^2 = a^2 dt^2$$

и $ds = a dt$. В результате для момента инерции J_y плоской кривой L с учетом формулы (5.9) перехода от криволинейного интеграла к определенному можем записать

$$J_y = \int_L y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t \cdot a dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi a^3.$$

Пример 5.8. Найдем положение центра масс полуокружности Γ с постоянной линейной плотностью ρ , заданной соотношениями $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$.

Ясно, что центр масс полуокружности в силу симметрии расположен на оси Ox , т.е. $y_C = 0$. Для вычисления второй координаты центра масс используем параметрическое представление полуокружности в виде

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда $ds = a dt$ (см. пример 5.7), и для проекции K_x вектора статического момента получаем

$$K_x = \int_{\Gamma} x \rho ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot \rho a dt = 2\rho a^2.$$

Масса m полуокружности постоянной линейной плотности ρ пропорциональна ее длине и равна $\pi \rho a$. Поэтому

$$x_C = \frac{K_x}{m} = \frac{2\rho a^2}{\pi \rho a} = \frac{2a}{\pi}.$$

Итак, центр масс полуокружности расположен в точке $\left(\frac{2a}{\pi}; 0\right)$.

Притяжение материальной точки плоской материальной кривой. По закону Ньютона материальная точка M массой m притягивает материальную точку M_0 массой m_0 с

силой $G \frac{m_0 m_i}{r^2}$, направленной от M_0 к M_i , где $r = r(M_0 M_i)$ — расстояние между точками M_0 и M_i , а G — гравитационная постоянная. Если материальную точку M_0 притягивает система материальных точек M_i , $i = \overline{1, n}$, с массами m_i , то равнодействующая всех сил притяжения равна сумме сил притяжения точки M_0 отдельными точками M_i этой системы.

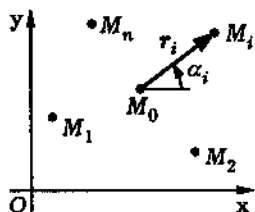


Рис. 5.3

Рассмотрим систему материальных точек M_i , $i = \overline{1, n}$, в координатной плоскости xOy (рис. 5.3). Чтобы вычислить сумму сил притяжения точки M_0 точками M_i , достаточно найти суммы проекций этих сил на координатные оси Ox и Oy . Пусть вектор $r_i = \overrightarrow{M_0 M_i}$ составляет с осью Ox угол α_i и имеет длину r_i .

Тогда проекции X_i и Y_i силы притяжения точки M_0 точкой M_i равны

$$X_i = G \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \alpha_i, \quad Y_i = G \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \alpha_i.$$

Суммируя эти проекции по всем точкам материальной системы, получаем проекции X и Y равнодействующей сил притяжения, с которой материальная система притягивает точку M_0 :

$$X = \sum_{i=1}^n G \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \alpha_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n G \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \alpha_i. \quad (5.19)$$

Рассмотрим теперь силу притяжения, с которой на точку M_0 действует материальная кривая AB . Полагаем, что распределение массы на материальной кривой характеризуется линейной плотностью $\rho(M)$. Как и в предыдущих задачах, чтобы вычислить силу притяжения, сначала заменим материальную кривую системой конечного числа материальных точек, а затем перейдем к пределу.

Разобьем кривую AB точками $A_0 = A$, $A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$ с длинами Δs_i и на каждой

дуге $A_{i-1}A_i$ выберем точку $M_i(x_i; y_i)$ (см. рис. 5.1). При достаточно мелком разбиении кривой AB можно приближенно считать, как и в предыдущих задачах, что масса m_i каждой элементарной дуги равна $\rho(M_i)\Delta s_i$ и сосредоточена в точке M_i . Мы приходим к задаче притяжения точки M_0 системой n материальных точек. Для такой системы проекции X и Y равнодействующей сил притяжения могут быть найдены по формулам (5.19). Тем самым мы получаем приближенные формулы для равнодействующей сил притяжения, с которой точка M_0 притягивается материальной кривой:

$$X \approx \sum_{i=1}^n G \frac{m_0 \rho(M_i) \Delta s_i}{r_i^2} \cos \alpha_i, \quad Y \approx \sum_{i=1}^n G \frac{m_0 \rho(M_i) \Delta s_i}{r_i^2} \sin \alpha_i.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $\lambda = \max_i \Delta s_i \rightarrow 0$, находим

$$X = Gm_0 \int_{AB} \frac{\rho(M) \cos \alpha(M)}{r^2(M)} ds, \quad Y = Gm_0 \int_{AB} \frac{\rho(M) \sin \alpha(M)}{r^2(M)} ds,$$

где $r(M) = |\mathbf{r}(M)|$ означает длину вектора $\mathbf{r}(M) = \overrightarrow{M_0M}$, а $\alpha(M)$ — угол между этим вектором и осью Ox .

Работа силы на криволинейном пути. Пусть материальная точка перемещается вдоль некоторой кривой AB в плоскости xOy и в каждой точке M ее пути на точку действует сила $F(M)$. Выясним, как можно вычислить работу силы, действующей на материальную точку. Будем считать, что кривая AB является гладкой.

Разобьем кривую AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$ с длинами Δs_i и выберем на каждой из таких дуг точку M_i (рис. 5.4). Если выбранное разбиение кривой AB достаточно мелкое, то можно принять два допущения:

1) перемещение материальной точки на участке $A_{i-1}A_i$ ее пути является прямолинейным, т.е. из положения A_{i-1} в поло-

жение A_i точка перемещается вдоль прямолинейного отрезка длиной $\Delta \bar{s}_i$;

2) сила, действующая на материальную точку при ее перемещении на участке $A_{i-1}A_i$, постоянна и совпадает с $F(M_i)$.

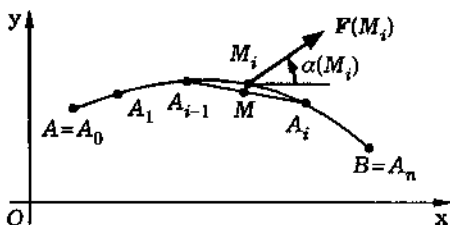


Рис. 5.4

При этих допущениях работа силы при перемещении материальной точки M из положения A_{i-1} в положение A_i вдоль элементарной дуги $A_{i-1}A_i$, $i = \overline{1, n}$, может быть записана с помощью скалярного произведения $(F(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i})$. Суммируя работу силы по всем элементарным дугам $A_{i-1}A_i$, мы получаем приближенную формулу для работы A , которую сила совершает при перемещении материальной точки по криволинейному пути AB :

$$A \approx \sum_{i=1}^n (F(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}). \quad (5.20)$$

Погрешность этой формулы, определяемая принятыми допущениями, будет тем меньше, чем мельче разбиение кривой AB . Поэтому естественно в качестве точного значения A работы принять предел суммы в правой части (5.20) при $\lambda = \max_i \Delta s_i \rightarrow 0$, т.е. считаем по определению, что

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (F(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}). \quad (5.21)$$

При $\lambda \rightarrow 0$ длина $\Delta \bar{s}_i$ прямолинейного отрезка $A_{i-1}A_i$ и длина Δs_i элементарной дуги $A_{i-1}A_i$ являются эквивалентными

бесконечно малыми. Кроме того, при малых λ можно считать, что угол между векторами $F(M_i)$ и $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ есть угол $\beta(M_i)$ между $F(M_i)$ и касательным вектором к кривой в точке M_i . Это позволяет записать равенство

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(M_i) \cos \beta(M_i) \Delta s_i. \quad (5.22)$$

В этом равенстве сумма в правой части есть интегральная сумма для криволинейного интеграла первого рода. Поэтому

$$A = \int_{AB} F(M) \cos \beta(M) ds. \quad (5.23)$$

Выражение $F(M) \cos \beta(M)$ представляет собой проекцию вектора $F(M)$ на касательный вектор к кривой AB в точке $M \in AB$. Обозначим через $t(M)$ единичный касательный вектор к кривой в точке M . Тогда $F(M) \cos \beta(M) = (F(M), t(M))$ [III] и равенство (5.23) перейдет в равенство

$$A = \int_{AB} (F(M), t(M)) ds. \quad (5.24)$$

Пусть $P(M)$ и $Q(M)$ — проекции вектора $F(M)$ на координатные оси. Вернемся к приближенной формуле (5.20). Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатные оси. Тогда в соответствии с правилом вычисления скалярного произведения

$$(F(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}) = P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

Следовательно, вместо (5.21) можно записать

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i). \quad (5.25)$$

Полученная формула уже не приводит к криволинейному интегралу первого рода, но имеет простой геометрический смысл. Сумма в правой части этой формулы похожа на ранее встречавшиеся интегральные суммы, и на ее основе можно построить интеграл нового типа.

5.4. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB и на этой кривой — непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарных дуги $A_{i-1}A_i$ и выберем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ точку $M_i(\tilde{x}_i; \tilde{y}_i)$ (см. рис. 5.1). Обозначим через x_i, y_i координаты точки A_i . Кроме того, обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проекции векторов $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатные оси Ox и Oy . Составим интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \Delta x_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i) \Delta y_i \quad (5.26)$$

вдоль кривой AB для функции $P(x, y)$ по переменному x и для функции $Q(x, y)$ по переменному y . По-прежнему через λ обозначим максимальную из длин Δs_i элементарных дуг $A_{i-1}A_i$, т.е. $\lambda = \max_{i=\overline{1, n}} \Delta s_i$.

Если существуют пределы I_1, I_2 интегральных сумм (5.26) при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящие ни от разбиения кривой AB на элементарные дуги, ни от выбора точек M_i на этих дугах, то эти пределы называют **криволинейными интегралами второго рода** вдоль кривой AB от функции $P(x, y)$ по переменному x и от функции $Q(x, y)$ по переменному y и обозначают

$$\int_{AB} P(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

Итак, по определению

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \Delta x_i, \quad (5.27)$$

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i) \Delta y_i. \quad (5.28)$$

В приложениях часто встречается сумма интегралов (5.27) и (5.28) от двух функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ (в частном случае эти функции могут совпадать). Такую сумму называют **криволинейным интегралом второго рода общего вида** и записывают под одним знаком интеграла:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (5.29)$$

К криволинейному интегралу второго рода приводит задача вычисления работы силы при перемещении материальной точки по криволинейному пути. Действительно, предел в правой части формулы (5.25) можно представить в виде суммы двух пределов, каждый из которых есть криволинейный интеграл второго рода по соответствующему переменному. Следовательно, вместо (5.25) можем записать

$$A = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (5.30)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ на координатные оси Ox и Oy .

Отметим, что работу силы на криволинейном пути можно представить и **криволинейным интегралом первого рода** в виде (5.24). Это позволяет записать равенство

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} \mathbf{F} \mathbf{t} ds,$$

которое устанавливает связь между криволинейными интегралами двух видов.

Криволинейные интегралы первого и второго рода имеют много общего. Однако у них есть и существенное различие: если первый из этих интегралов не зависит от выбора направления обхода кривой (от выбора ориентации этой кривой), то второй при изменении направления обхода на противоположное меняет знак. Это связано с тем, что в интегральной сумме интеграла первого рода значения функции $f(M_i)$ умножаются на длины Δs_i дуг $A_{i-1}A_i$, в то время как в случае интеграла второго рода значения функции умножаются на проекции Δx_i (или Δy_i) вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатную ось Ox (или Oy). В последнем случае изменение направления обхода приводит к изменению направления векторов и, как следствие, к изменению знака их проекций. Таким образом, для криволинейных интегралов второго рода имеем

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_{AB} Q(x, y) dy = - \int_{BA} Q(x, y) dy,$$

причем из существования интегралов в правых частях этих равенств вытекает существование интегралов в левых частях, и наоборот.

Понятие криволинейного интеграла второго рода можно перенести на случай пространственной кривой. Если на кривой AB в пространстве заданы непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, то, как и выше, разбивая кривую AB на элементарные дуги с длинами Δs_i , можно построить интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i, \quad \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i$$

и рассмотреть их пределы при стремлении к нулю величины $\lambda = \max_{i=1, n} \Delta s_i$. Эти пределы, если они существуют, называют

криволинейными интегралами второго рода по переменным x , y и z вдоль пространственной кривой AB и обозначают

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z) dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z) dz.$$

В приложениях часто встречается сумма этих интегралов, которую объединяют общим знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + \int_{AB} Q(x, y, z) dy + \int_{AB} R(x, y, z) dz = \\ = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Для пространственной кривой AB существует аналогичная связь между криволинейными интегралами первого и второго родов:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \int_{AB} \mathbf{F} \mathbf{t} ds, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$ — векторная функция, для которой $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$ и $R(M) = R(x, y, z)$ являются координатными функциями в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, а α , β , γ — углы, образованные единичным вектором $\mathbf{t}(M)$, касательным к кривой AB в точке M , с осями Ox , Oy и Oz соответственно.

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L часто обозначают специальным символом \oint и иногда называют контурным интегралом. Для такого интеграла направление обхода контура уже нельзя задать, указав начальную и конечную точки кривой. Чтобы определить направление обхода контура, можно использовать различные способы. Например, при параметрическом задании контура в качестве

направления его обхода можно выбрать то, которое соответствует возрастанию параметра кривой.

В плоском случае для простейших контуров (окружность, эллипс) направление обхода часто сравнивают с движением часовой стрелки. При этом обход контура против хода часовой стрелки (или просто против часовой стрелки) называют положительным, а обход контура по ходу часовой стрелки (по часовой стрелке) — отрицательным (рис. 5.5, а).

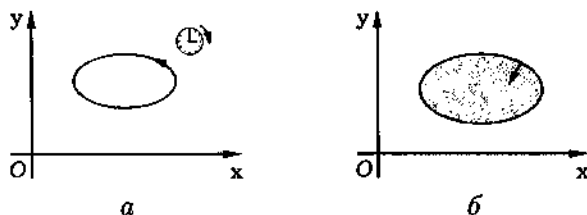


Рис. 5.5

В приложениях зачастую контур фигурирует как граница некоторой плоской области (в этом случае *контур простой*). Тогда обход контура можно соотнести с этой областью: при положительном обходе контура область все время остается слева, а при отрицательном — справа (рис. 5.5, б).

Однако описанные способы указания направления обхода контура приемлемы лишь в относительно простых ситуациях. В каком смысле следует понимать обход контура на рис. 5.6

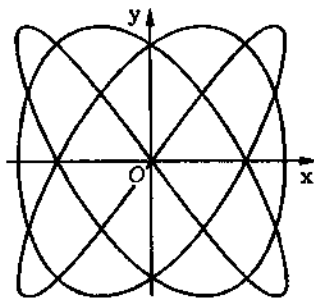


Рис. 5.6

против часовой стрелки? В таких непростых ситуациях направление обхода можно задать, выбрав на контуре три различные точки и указав, в каком порядке они проходятся.

Для контурных интегралов, в которых направление обхода контура задано как положительное (против часовой стрелки), иногда используют специальное обозначение \oint , если же направление обхода контура задано как отрицательное, то используют обозначение \oint . Таким образом, если L — окружность, то в интеграле

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

предполагается обход L против часовой стрелки, а в интеграле

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad -$$

по часовой стрелке.

5.5. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Предполагаем, что значение параметра $t = \alpha$ соответствует точке A , а значение $t = \beta$ — точке B .

Теорема 5.2. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ в параметрическом представлении кривой AB непрерывно дифференцируемы,

а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой AB , то криволинейный интеграл второго рода общего вида вдоль кривой AB от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ существует, причем для него верно равенство

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt. \quad (5.32)$$

◀ Криволинейный интеграл второго рода общего вида состоит из двух частей, определяемых функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Можно ограничиться доказательством теоремы лишь для одной части, так как для другой части доказательство аналогично.

Итак, докажем, что для непрерывной на гладкой кривой AB функции $P(x, y)$ криволинейный интеграл второго рода по переменному x существует, причем

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t) dt. \quad (5.33)$$

Выберем произвольное разбиение кривой AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$. Пусть $t_i, i = \overline{0, n}$, — значения параметра кривой, соответствующие точкам A_i . Для этих значений верны соотношения

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

На каждой элементарной дуге $A_{i-1}A_i$ произвольным образом выберем точку $M_i(\tilde{x}_i; \tilde{y}_i)$, и пусть τ_i — значение параметра, отвечающее этой точке. Очевидно, что $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, i = \overline{1, n}$. Для интегральной суммы S , соответствующей выбранному раз-

биению кривой AB , можем записать

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i)) (x(t_i) - x(t_{i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(x(\tau_i), y(\tau_i)) x'(t) dt. \end{aligned}$$

Интеграл I в правой части (5.33) в силу условий теоремы существует, так как его подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Используя свойство аддитивности определенного интеграла, запишем

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(x(t), y(t)) x'(t) dt.$$

Из полученных представлений интегральной суммы S и интеграла I находим

$$S - I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t))) x'(t) dt.$$

Оценим правую часть этого равенства.

Так как функция $F(t) = P(x(t), y(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то она равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых значений $t', t'' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|F(t') - F(t'')| < \varepsilon$. Функция $s(t)$ переменной длины дуги кривой AB , отсчитываемой от ее начальной точки A , является непрерывно дифференцируемой и возрастающей [II]. Следовательно, существует обратная функция $t(s)$, определенная на отрезке $[0, s_{AB}]$, где s_{AB} — длина кривой AB .

Эта функция непрерывно дифференцируема, а модуль ее производной $|t'(s)|$ достигает на отрезке $[0, s_{AB}]$ некоторого максимального значения K_1 , т.е. $|t'(s)| \leq K_1, 0 \leq s \leq s_{AB}$. Из формулы конечных приращений вытекает, что

$$|t_i - t_{i-1}| = |t'(\xi_i)| \Delta s_i \leq K_1 \Delta s_i \leq K_1 \lambda,$$

где $s_i = s(t_i), i = \overline{0, n}, \Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — длины элементарных дуг разбиения кривой, а $\lambda = \max_{i=1, n} \Delta s_i$.

Пусть разбиение кривой удовлетворяет условию $\lambda < \delta(\varepsilon)/K_1$. Тогда для любых $t', t'' \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$|t' - t''| \leq t_i - t_{i-1} \leq K_1 \Delta s_i < \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, $|F(\tau_i) - F(t)| < \varepsilon$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ и

$$\begin{aligned} |S - I| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t)) \right| |x'(t)| dt < \\ &< \varepsilon K_2 \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \varepsilon K(b - a), \end{aligned}$$

где K_2 — максимальное значение непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции $|x'(t)|$. Таким образом, $S \rightarrow I$ при $\lambda = \max_{i=1, n} \Delta s_i \rightarrow 0$, что доказывает теорему. ►

Согласно доказанной теореме, для вычисления криволинейного интеграла второго рода в подынтегральном выражении необходимо от переменных x и y перейти к параметру t кривой, для чего через t следует выразить подынтегральные функции $P(x, y), Q(x, y)$ и дифференциалы dx, dy . В доказательстве теоремы предполагалось, что начальной точке A кривой AB соответствует левый конец отрезка $[\alpha, \beta]$, являющегося областью изменения параметра кривой. Если же параметризация кривой не согласована с направлением ее обхода, то в фор-

муле (5.32) определенный интеграл справа соответствует противоположному направлению обхода, т.е. левая и правая части формулы отличаются знаками. Для восстановления равенства можно в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования. Таким образом, действует следующее правило: при переходе от криволинейного интеграла второго рода к определенному нижний предел интегрирования должен соответствовать начальной точке кривой, а верхний предел интегрирования — конечной.

Рассмотрим два варианта задания плоской кривой AB . Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то в качестве параметра кривой можно взять абсциссу x точки на кривой. В этом случае в соответствии с формулой (5.32) получаем

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx, \quad (5.34) \end{aligned}$$

где a и b — абсциссы точек A и B этой кривой. При задании кривой в виде $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, в качестве параметра можем взять ординату y точки кривой. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_c^d (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)) dy. \quad (5.35) \end{aligned}$$

Здесь c и d — ординаты точек A и B кривой.

Теорема 5.2 без каких-либо затруднений переносится на случай пространственной кривой. Пусть пространственная кривая

AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — функции, непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ вместе со своими производными, причем начальной точке A кривой соответствует значение параметра $t = \alpha$, конечной точке B кривой — значение параметра $t = \beta$. Тогда криволинейный интеграл второго рода общего вида (5.31) от непрерывных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вдоль пространственной кривой AB существует, и для него верно равенство, аналогичное (5.32):

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right. \\ \left. + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Пример 5.9. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} (x + y) dx + 2z dy + xy dz$$

вдоль пространственной кривой AB , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad t \in [1, 2].$$

В данном случае $dx = dt$, $dy = 2t dt$ и $dz = -dt$. Поэтому, используя формулу (5.36), находим

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 ((t+t^2) + 2(3-t) \cdot 2t + t \cdot t^2(-1)) dt = \int_1^2 (13t - 3t^2 - t^3) dt = \\ &= \left(\frac{13}{2}t^2 - t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right) \Big|_1^2 = 26 - \frac{13}{2} - 8 + 1 - 4 + \frac{1}{4} = \frac{35}{4}. \end{aligned}$$

Пример 5.10. Найдем криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} (4x - y) dx + 5x^2 y dy$$

вдоль параболы $y = 3x^2$ между ее точками $A(0;0)$ и $B(1;3)$.

В соответствии с (5.34) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 ((4x - 3x^2) + 5x^2 \cdot 3x^2 \cdot 6x) dx = \\ &= \int_0^1 (4x - 3x^2 + 90x^5) dx = (2x^2 - x^3 + 15x^6) \Big|_0^1 = 16. \end{aligned}$$

5.6. Свойства криволинейного интеграла второго рода

Рассмотрим основные свойства *криволинейного интеграла второго рода общего вида*.

1°. При изменении направления обхода кривой AB криволинейный интеграл второго рода вдоль этой кривой меняет знак:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

2°. Постоянный множитель k можно выносить за знак криволинейного интеграла:

$$\int_{AB} kP(x, y) dx + kQ(x, y) dy = k \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

3°. Криволинейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждого из слагаемых:

$$\int_{AB} (P_1(x, y) + P_2(x, y)) dx = \int_{AB} P_1(x, y) dx + \int_{AB} P_2(x, y) dx,$$

$$\int_{AB} (Q_1(x, y) + Q_2(x, y)) dy = \int_{AB} Q_1(x, y) dy + \int_{AB} Q_2(x, y) dy.$$

Свойства 2° и 3° означают линейность криволинейного интеграла: интеграл от линейной комбинации функций равен такой же линейной комбинации интегралов от каждой из этих функций.

4°. Если кривая AB разбита на конечное число примыкающих одна к другой дуг и вдоль каждой из них в отдельности криволинейный интеграл существует, то существует и интеграл вдоль всей кривой AB , причем он равен сумме интегралов по отдельным составляющим ее дугам.

Это свойство есть свойство аддитивности криволинейного интеграла второго рода.

Свойства 1°–4° несложно доказать, используя определение криволинейного интеграла второго рода как предела интегральных сумм и известные свойства предела. Эти доказательства повторяют доказательства соответствующих свойств определенного интеграла.

5°. Если кривая L является замкнутой, то значение криволинейного интеграла вдоль кривой L не зависит от выбора начальной (она же и конечная) точки на этой кривой.

Действительно, пусть A и C — произвольные не совпадающие точки на кривой L . Покажем, что если в качестве начальной точки замкнутой кривой в первом случае выбрать точку A , а во втором случае — точку C , то в результате получим одно и то же значение криволинейного интеграла. На двух дугах кривой L с концевыми точками A и C выберем произвольным образом точки M и N (рис. 5.7). Эти точки удобны для маркировки дуг, на которые кривая L делится точками A и C . Из свойства аддитивности криволинейного интеграла получаем

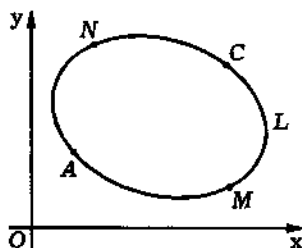


Рис. 5.7

$$\begin{aligned}
 & \int_{AMCNA} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \\
 & = \int_{AMC} P(x,y) dx + Q(x,y) dy + \int_{CNA} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \\
 & = \int_{CNA} P(x,y) dx + Q(x,y) dy + \int_{AMC} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \\
 & = \int_{CNAMC} P(x,y) dx + Q(x,y) dy.
 \end{aligned}$$

6°. Если кривая AB представляет собой отрезок прямой, параллельной оси Oy , то

$$\int_{AB} P(x,y) dx = 0.$$

Если же AB — это отрезок прямой, параллельной оси Ox , то

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = 0.$$

Это свойство объясняется тем, что для таких интегралов соответствующие интегральные суммы равны нулю независимо от выбора разбиения кривой и выбора точек на элементарных дугах разбиения.

5.7. Формула Грина

Рассмотрим случай *криволинейного интеграла второго рода* вдоль *простого замкнутого контура* L в плоскости xOy . В этом случае контур L является границей некоторой плоской замкнутой области D . Оказывается, что криволинейный интеграл второго рода вдоль L может быть преобразован в двойной интеграл по замкнутой области D . Установим, как и при каких условиях выполняется такое преобразование.

Теорема 5.3. Пусть замкнутая область D на плоскости xOy ограничена простым кусочно гладким контуром L , а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными. Тогда имеет место следующая **формула Грина*** для односвязной области:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (5.37)$$

где контур L обходится в положительном направлении.

◀ Формула Грина фактически распадается на две независимые формулы

$$\oint_L P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad \text{и} \quad \oint_L Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

* Дж. Грин (1793–1841) — английский математик и физик.

Эти две формулы являются частными случаями общей формулы (5.37), первая — при $Q \equiv 0$, вторая — при $P \equiv 0$. Доказав эти две формулы, мы получим общую формулу (5.37) их суммированием. Доказательство двух формул строится по одной схеме. Поэтому можно ограничиться доказательством одной из них, например первой.

Сперва рассмотрим простейший случай, когда замкнутая область D является *правильной областью интегрирования* относительно координатной оси Oy . Это значит, что она ограничена снизу и сверху кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют неравенству $y_1(x) \leq y_2(x)$, $x \in [a, b]$, а слева и справа — вертикальными отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.8). В этом случае граница L замкнутой области D является кусочно гладким простым контуром, а положительное направление обхода соответствует последовательности $ABFEA$ точек этого контура. Отметим, что в частном случае каждый из вертикальных отрезков AE и BF может выродиться в точку.

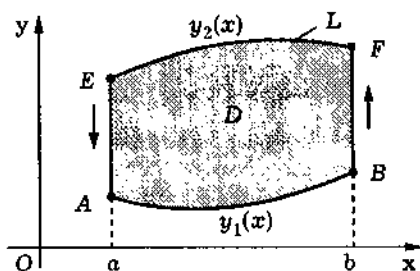


Рис. 5.8

Докажем, что в случае, когда замкнутая область является *правильной* относительно оси Oy , верно равенство

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P dx. \quad (5.38)$$

Согласно условиям теоремы, двойной интеграл в левой части этого равенства существует, причем форма области интегрирования позволяет свести его к повторному интегралу. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Используя правило вычисления криволинейного интеграла второго рода и его свойство 1° (см. 5.6), заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, y_2(x)) dx &= \int_{EF} P(x, y) dx = - \int_{FE} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_1(x)) dx &= \int_{AB} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (5.39), находим

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{FE} P(x, y) dx - \int_{AB} P(x, y) dx.$$

Последнее равенство не будет нарушено, если в его правую часть дописать со знаком минус интегралы

$$\int_{BF} P(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_{EA} P(x, y) dx,$$

равные нулю, так как они берутся вдоль отрезков прямых, параллельных координатной оси Oy . В итоге будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{AB} P(x, y) dx - \int_{BF} P(x, y) dx - \\ &- \int_{FE} P(x, y) dx - \int_{EA} P(x, y) dx = - \oint_L P(x, y) dx, \end{aligned}$$

что доказывает равенство (5.38).

Предположим, что замкнутая область D не является правильной относительно оси Oy , но может быть разделена кусочно гладкими кривыми на конечное число замкнутых областей, правильных относительно оси Oy . Записывая формулу (5.38) для каждой частичной области и суммируя полученные равенства, мы приходим к формуле (5.38) для всей области D . В самом деле, рассмотрим, например, ситуацию, изображенную на рис. 5.9. Область интегрирования D разбита на три частичные области D_1 , D_2 и D_3 , ограниченные контурами L_1 , L_2 , L_3 . В силу аддитивности двойного интеграла двойной интеграл по области D равен сумме трех двойных интегралов по частичным областям:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

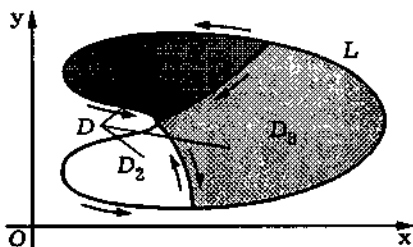


Рис. 5.9

В сумме трех криволинейных интегралов по границам частичных областей интегралы по кривым γ_1 и γ_2 , которыми замкнута область D была разделена на частичные области, встретятся дважды, причем с противоположными направлениями. Поэтому эти интегралы взаимно уничтожаются, а сумма криволинейных интегралов по границам трех частичных областей оказывается равной криволинейному интегралу по границе замкнутой области D :

$$\oint_L P dx = \oint_{L_1} P dx + \oint_{L_2} P dx + \oint_{L_3} P dx.$$

Сопоставляя последние два равенства, приходим к формуле (5.38) для замкнутой области D .

Доказательство формулы

$$\oint_L Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

аналогично и проводится в предположении, что замкнутая область D либо является правильной в направлении оси Ox , либо может быть разделена на конечное число таких областей. ►

В связи с доказанной теоремой остановимся на следующем важном понятии. Плоскую область D называют *односвязной областью*, когда она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур L целиком лежит в области D , то и область, ограниченная контуром L , целиком лежит в D . Плоскую область, не являющуюся односвязной, называют *многосвязной областью*. Примером многосвязной области является кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Для многосвязной области характерно наличие отверстий („дырок“). В общем случае многосвязная область может иметь очень сложную структуру. Мы ограничимся рассмотрением частного случая многосвязной области, когда граница этой области состоит из конечного

числа попарно не пересекающихся контуров. В этом случае один контур L_0 является внешним, а остальные контуры L_1, \dots, L_n — внутренними (они ограничивают отверстия в области). Отметим, что положительным направлением обхода внешнего контура следует считать движение против часовой стрелки, а положительным направлением обхода внутренних контуров — движение по часовой стрелке, поскольку при таком движении область D , ограниченная этими контурами, остается все время слева (рис. 5.10).

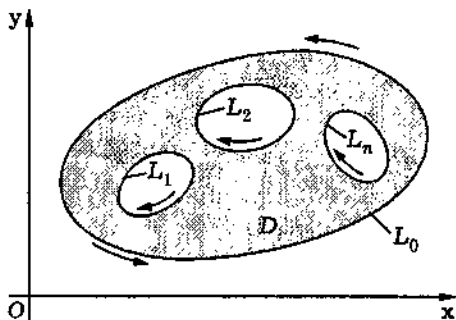


Рис. 5.10

В дальнейшем мы также будем говорить об *односвязной (многосвязной) замкнутой области D* , имея в виду, что D является замыканием односвязной (многосвязной) области.

Формулу Грина можно распространить на случай много-связной замкнутой области D , ограниченной внешним кусочно гладким контуром L_0 и внутренними кусочно гладкими контурами L_1, L_2, \dots, L_n . Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными, то верна *формула Грина для многосвязной области*

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (5.40)$$

где символ $\oint_{\partial D}$ (криволинейный интеграл по границе замкнутой области) обозначает сумму криволинейных интегралов по всем контурам, составляющим границу D , каждый из которых обходится в положительном направлении.

Чтобы доказать эту формулу, разрежем замкнутую область D вдоль кривых, соединяющих внутренние контуры L_n с внешним контуром L_0 (рис. 5.11). После таких разрезов мы получим односвязную область D^* , ограниченную кусочно гладким контуром L^* , в который входят все разрезы. Для односвязной замкнутой области D^* верна формула Грина, т.е.

$$\oint_{L^*} P dx + Q dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

причем в криволинейном интеграле контур L^* обходится так, что область D^* остается слева.

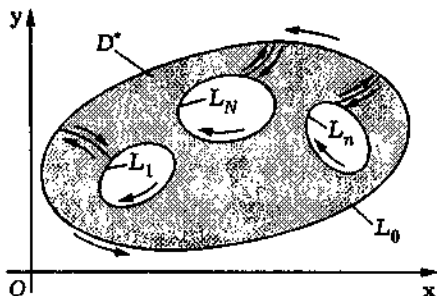


Рис. 5.11

При интегрировании вдоль границы области D^* криволинейные интегралы по разрезам берутся дважды в противоположных направлениях и потому взаимно уничтожаются. Поэтому криволинейный интеграл по контуру L^* , проходимому в положительном направлении, равен сумме криволинейных интегралов по всем контурам L_i , $i = \overline{0, n}$, также проходимым в положительном направлении, т.е. криволинейному интегралу

вдоль границы исходной области D . Так как наличие разрезов (множеств меры нуль) не влияет на значение двойного интеграла, заключаем, что верна формула (5.40).

Формулу Грина для многосвязной области можно записать, не используя понятия интеграла по границе области. Если считать, что все контуры L_i , $i = \overline{0, n}$, обходятся против часовой стрелки, то

$$\oint_{L_0} P dx + Q dy - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Одно из возможных применений формулы Грина — вычисление площади плоской фигуры, ограниченной кусочно гладким контуром. Площадь замкнутой области D равна двойному интегралу с областью интегрирования D и подынтегральной функцией, тождественно равной единице. Подбрав функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$ в D , мы с помощью формулы Грина можем вычислить площадь через криволинейный интеграл. Подбирать функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ можно различными способами, но, как правило, используют самые простые:

- а) $P = -y$, $Q \equiv 0$;
- б) $P \equiv 0$, $Q = x$;
- в) $P = -y/2$, $Q = x/2$.

Для этих трех вариантов имеем

$$S = \iint_D dx dy = - \oint_L y dx, \quad S = \iint_D dx dy = \oint_L x dy,$$

$$S = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

В качестве примера вычислим по последней формуле площадь, которая ограничена эллипсом с полуосями a и b , задан-

ным параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Находим $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$ и получаем

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

5.8. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть в некоторой области D в плоскости Oxy заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода общего вида

$$I = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (5.41)$$

где AB — произвольная кусочно гладкая кривая, целиком лежащая в D и соединяющая точки A и B этой области. Выясним условия, при которых значение такого интеграла зависит лишь от точек A и B и не меняется при изменении кривой, связывающей точки A и B (в таком случае обычно говорят, что интеграл не зависит от пути интегрирования).

Теорема 5.4. Для того чтобы значение криволинейного интеграла (5.41) в области D не зависело от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура L в D выполнялось равенство

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (5.42)$$

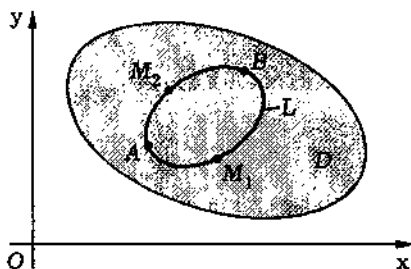


Рис. 5.12

◀ **Необходимость.** Предположим, что значение криволинейного интеграла (5.41) не зависит от пути интегрирования. Произвольный контур L , целиком лежащий в D , двумя любыми точками A и B разделим на две кривые AM_1B и AM_2B (рис. 5.12). Тогда, исходя из предположения, можно записать (аргументы у подынтегральных функций здесь и далее для краткости опущены)

$$\int_{AM_1B} P dx + Q dy = \int_{AM_2B} P dx + Q dy.$$

Отсюда, учитывая свойства криволинейного интеграла второго рода (см. 5.6), получаем

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy &= \int_{AM_1B} P dx + Q dy + \int_{BM_2A} P dx + Q dy = \\ &= \int_{AM_1B} P dx + Q dy - \int_{AM_2B} P dx + Q dy = 0. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть равенство (5.42) выполнено для любого контура L , целиком лежащего в области D . Выберем произвольные точки A и B в D и соединим их двумя различными кривыми AM_1B и AM_2B , целиком лежащими в D . Из этих кривых можно составить контур L (см. рис. 5.12). В силу

предположения и свойства 4° криволинейного интеграла второго рода (см. 5.6) имеем

$$\oint_L P dx + Q dy = \int_{AM_1B} P dx + Q dy + \int_{BM_2A} P dx + Q dy = 0.$$

Так как при изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл второго рода меняет знак (см. 5.6), из последнего равенства следует, что

$$\int_{AM_1B} P dx + Q dy = \int_{AM_2B} P dx + Q dy.$$

Поскольку точки A и B , а также две связывающие их кривые были выбраны произвольно, заключаем, что криволинейный интеграл в области D не зависит от пути интегрирования. ►

Пусть в области D криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не зависит от пути интегрирования. Тогда его значение определяется лишь начальной точкой A и конечной точкой B пути интегрирования. Учитывая это, такой интеграл записывают в виде

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

рассматривая точки A и B как нижний и верхний пределы интегрирования.

Зафиксируем точку $A \in D$. Тогда криволинейный интеграл от точки A до произвольной точки $M(x; y)$ определяет в области D функцию

$$F(x, y) = \int_A^{(x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (5.43)$$

С помощью этой функции значение криволинейного интеграла можно вычислить для любой пары точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в D , а именно

$$\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \quad (5.44)$$

Действительно, путь интегрирования от точки M_1 до точки M_2 можно выбрать так, что он будет проходить через точку A . Тогда в силу свойства аддитивности интеграл можно представить как сумму двух интегралов, первый — от точки M_1 до точки A , а второй — от точки A до точки M_2 . Значение первого интеграла с учетом направления будет равно $-F(x_1, y_1)$, значение второго — $F(x_2, y_2)$.

Формулу (5.44) по аналогии с определенным интегралом часто называют *формулой Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла*.

Теорема 5.5. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D , а криволинейный интеграл второго рода от этих функций в области D не зависит от пути, то функция $F(x, y)$, определяемая равенством (5.43), имеет в D непрерывные частные производные, причем

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

◀ Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка области D . Выберем $\delta > 0$ настолько малое, что δ -окрестность точки M целиком попадает в область D . Для произвольного приращения Δx , удовлетворяющего неравенству $|\Delta x| < \delta$, согласно формуле Ньютона — Лейбница, имеем

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

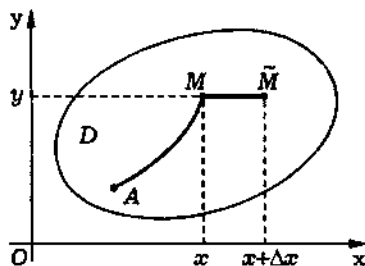


Рис. 5.13

причем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле можно взять горизонтальный отрезок, соединяющий точки $M(x; y)$ и $\tilde{M}(x + \Delta x; y)$ (рис. 5.13). В этом случае $dy \equiv 0$, переменное y имеет постоянное значение, и мы получаем

$$\int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_x^{x + \Delta x} P(\xi, y) d\xi,$$

где последний интеграл есть определенный интеграл по отрезку $[x, x + \Delta x]$. Итак, функция $\varphi(\Delta x) = F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$ переменного Δx представлена как определенный интеграл с переменным верхним пределом, причем подынтегральная функция является непрерывной в точке $\xi = x$. Поэтому функция $\varphi(\Delta x)$ дифференцируема при $\Delta x = 0$ и $\varphi'(0) = P(x, y)$. Но последнее равенство и означает, что в точке $M(x; y)$ функция $F(x, y)$ имеет частную производную по переменному x , равную $P(x, y)$.

Аналогичным образом, используя приращение Δy по переменному y , можно показать, что в точке M функция $F(x, y)$ имеет также и частную производную по переменному y , равную $Q(x, y)$. ►

Теорема 5.6. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой одно-

связной области D в плоскости xOy . Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является в области D полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$;

2) всюду в области D верно равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}; \quad (5.45)$$

3) для любого кусочно гладкого контура L , целиком лежащего в области D , верно равенство

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

4) криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области D не зависит от пути интегрирования.

◀ Докажем эту теорему „вкруговую“. Сначала покажем, что из первого условия теоремы следует второе. Пусть

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y). \quad (5.46)$$

Тогда имеем [V]

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

В силу непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ правые части последних равенств равны между собой, так как непрерывные смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому равны и левые части этих равенств, т.е. выполнено второе условие теоремы.

Покажем теперь, что из второго условия теоремы следует третье. Пусть L — произвольный кусочно гладкий контур, целиком лежащий в области D . Согласно формуле Грина для односвязной области,

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

так как в силу второго условия теоремы подынтегральная функция в двойном интеграле тождественно равна нулю. Итак, доказано, что выполнено третье условие теоремы.

Третье и четвертое условия эквивалентны в силу теоремы 5.4. Пусть выполнено четвертое условие. Согласно теореме 5.5, функция $F(x, y)$, определяемая равенством (5.43), имеет непрерывные частные производные, равные $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Но тогда эта функция дифференцируема, а ее дифференциал имеет вид

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Это доказывает выполнение первого условия теоремы. ►

Теорема 5.6 дает не только несколько критериев независимости криволинейного интеграла от пути, но и метод, позволяющий восстановить функцию $F(x, y)$ по ее дифференциалу $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ называют дифференциальной формой. В теореме 5.6 сформулированы условия, при которых дифференциальная форма является дифференциалом некоторой функции двух переменных.

Пример 5.11. Рассмотрим количество dQ тепловой энергии, которое необходимо сообщить 1 кмоль идеального газа, чтобы перевести этот газ из состояния, определяемого давлением p , объемом v и абсолютной температурой T , в близкое состояние $p + dp$, $v + dv$, $T + dT$. Выясним, можно ли представить величину dQ как дифференциал некоторой функции переменных p , v , T . Поскольку газ идеальный, давление, объем

и температура связаны уравнением состояния

$$pv = RT, \quad (5.47)$$

где $R \approx 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$ — универсальная газовая постоянная. Это уравнение, имеющее фундаментальное значение в естественных науках и технике, вывел в 1874 г. русский химик Д.И. Менделеев (1834–1907), но пропорциональность величин pv и T установил еще в 1834 г. французский физик и инженер Б.П.Э. Клапейрон (1799–1864). Поэтому (5.47) принято называть уравнением Клапейрона — Менделеева.

Если при подводе тепловой энергии dQ объем v газа не изменяется, то его температура возрастает на $dT_1 = \frac{dQ}{c_v}$, где c_v — теплоемкость 1 кмоль газа при постоянном объеме. В соответствии с уравнением (5.47) возрастает давление на $dp_1 = \frac{R}{v} dT_1$. При неизменном давлении p из уравнения (5.47) следует, что рост температуры на dT вызовет увеличение объема на $dv = \frac{R}{p} dT$, т.е. газ совершит работу $p dv$. Действительно, пусть газ находится при давлении p в цилиндре с поршнем площадью S и занимает объем v (рис. 5.14). Газ действует на поршень с силой pS , которая уравновешена силой $P = pS$, приложенной в обратном направлении к штоку. При увеличении объема газа на dv поршень перемещается на расстояние $ds = \frac{dv}{S}$ и совершает работу, равную произведению постоянной силы на перемещение поршня: $pS \cdot \frac{dv}{S} = p dv = R dT$.

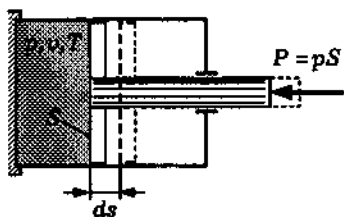


Рис. 5.14

Таким образом, для повышения температуры газа на dT при неизменном давлении необходимо подвести больше тепловой энергии, чем при неизменном объеме, а именно

$$dQ = c_v dT + p dv = c_v dT + R dT = c_p dT,$$

где $c_p = c_v + R$ — теплоемкость 1 кмоль газа при постоянном давлении. Если при изменении состояния газа изменяются все три параметра p , v и T , то переход в близкое состояние можно разделить на две стадии: сначала температура изменяется на dT при постоянном объеме и вызывает изменение давления, а затем при постоянном давлении изменяется на dv объем. Тогда получим

$$dQ = c_v dT + p dv. \quad (5.48)$$

Из трех параметров состояния газа, согласно уравнению Клапейрона — Менделеева, независимыми являются лишь два. При анализе процессов, в которых газ используют в качестве рабочего тела тепловых двигателей и холодильных машин, часто независимыми параметрами выбирают p и v . Дифференцированием (5.47) найдем $p dv + v dp = R dT$ и, исключив из (5.48) dT , запишем

$$dQ = \frac{c_v}{R}(p dv + v dp) + p dv = \frac{c_p}{R} p dv + \frac{c_v}{R} v dp. \quad (5.49)$$

Полагая, что c_p и c_v постоянны, и сравнивая частные производные

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{R} p \right) = \frac{c_p}{R} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{R} v \right) = \frac{c_v}{R},$$

устанавливаем, что равенство (5.45) в данном случае не выполнено, так как $c_p > c_v$. Следовательно, подведенное к газу количество энергии dQ не является полным дифференциалом. Это означает, что при переходе идеального газа из одного состояния в другое подведенное к газу (или отведенное

от него) количество тепловой энергии зависит от конкретного процесса перехода, изображаемого в координатной плоскости vOp некоторой кривой AB (рис. 5.15), и равно

$$\int_{AB} \frac{c_p}{R} p dv + \frac{c_v}{R} v dp.$$

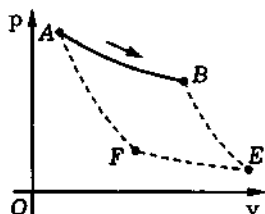


Рис. 5.15

Даже при возвращении газа в исходное состояние по некоторой замкнутой кривой $ABEFA$ он может приобрести (или потерять) определенное количество тепловой энергии, что и положено в основу рабочих процессов разнообразных тепловых двигателей и холодильных машин.

Отметим, что записанное с учетом (5.47) и (5.48) отношение

$$\frac{dQ}{T} = \frac{R}{pv} dQ = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}$$

является полным дифференциалом функции

$$\sigma = C + c_p \ln v + c_v \ln p, \quad C = \text{const},$$

называемой в термодинамике энтропией (от греческого слова *εντροπια* — поворот, превращение). Поэтому, согласно теореме 5.6, криволинейный интеграл

$$\int_{AB} \frac{dQ}{T}$$

не зависит от пути интегрирования. Таким образом, энтропия является функцией только состояния газа и не зависит от процесса перехода из одного состояния в другое, тогда как подведенная к газу тепловая энергия Q таким свойством не обладает.

5.9. Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала

В односвязной плоской области D криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

не зависит от пути интегрирования, если подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют в D непрерывные частные производные, то, согласно теореме 5.6, для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in D.$$

Напомним, что для криволинейных интегралов, не зависящих от пути, используют специальное обозначение

$$I = \int_{A(x_A; y_A)}^{B(x_B; y_B)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

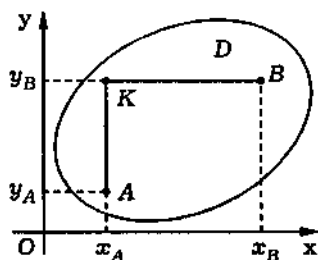


Рис. 5.16

Основная идея в вычислении таких интегралов состоит в выборе наиболее простого пути интегрирования. Как правило, в этом случае в качестве пути интегрирования выбирают ломаную AKB , состоящую из двух отрезков прямых, параллельных координатным осям (рис. 5.16). Если такой путь интегрирования целиком попадает в

область D , то в соответствии со свойством 4° криволинейного интеграла второго рода (см. 5.6) можно написать

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{AK} Q(x_A, y) dy + \int_{KB} P(x, y_B) dx = \\ &= \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A, y) dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_B) dx, \end{aligned}$$

поскольку при интегрировании по отрезку AK имеем $x = x_A = \text{const}$, $dx \equiv 0$ и y изменяется от y_A до y_B , а при интегрировании по отрезку KB — $y = y_B = \text{const}$, $dy \equiv 0$ и x изменяется от x_A до x_B . Таким образом, получаем формулу

$$\begin{aligned} \int_{(x_A; y_A)}^{(x_B; y_B)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A, y) dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_B) dx, \quad (5.50) \end{aligned}$$

которую удобно использовать для вычисления криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала в плоской односвязной области D .

Криволинейный интеграл, не зависящий от пути, можно вычислять и с помощью формулы Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла. Это удобно в случае, когда легко найти функцию $F(x, y)$, дифференциалом которой является подынтегральное выражение. Отметим, что на практике часто решают обратную задачу: с помощью криволинейного интеграла определяют функцию $F(x, y)$.

Пример 5.12. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{(1;1)}^{(3;3)} y dx + x dy.$$

В этом случае легко сразу указать функцию $F(x, y) = xy$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Действительно,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = y dx + x dy.$$

Используя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$I = xy \Big|_{(1;1)}^{(3;3)} = 9 - 1 = 8.$$

Пример 5.13. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{(-2; -1)}^{(3; 0)} (5x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy.$$

В данном случае $P(x, y) = 5x^4 + 4xy^3$ и $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$. Нетрудно убедиться, что условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено на всей плоскости xOy , т.е. подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Однако, в отличие от примера 5.12, найти эту функцию „с ходу“ не удается. Поэтому прибегаем к непосредственному вычислению интеграла, выбирая путь интегрирования, проходящий сначала вдоль прямой $x = -2$, а затем вдоль прямой $y = 0$. Используя формулу (5.50), находим

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 (6(-2)^2y^2 - 5y^4) dy + \int_{-2}^3 5x^4 dx = \\ &= (8y^3 - y^5) \Big|_{-1}^0 + x^5 \Big|_{-2}^3 = 8 - 1 + 243 + 32 = 282. \quad \# \end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно задачу восстановления функции $F(x, y)$ по ее полному дифференциалу $dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Ясно, что решение такой задачи может быть

найденно с точностью до постоянного слагаемого. Применяя формулу Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла в случае фиксированной точки $(x_0; y_0)$ и переменной точки $(x; y)$, заключаем, что

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Поскольку искомую функцию можно изменить добавлением произвольной постоянной, то

$$F(x, y) = C + \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad C = \text{const.} \quad (5.51)$$

Для вычисления криволинейного интеграла в правой части (5.51), как и выше, можно выбрать наиболее удобный путь интегрирования. Например, можно взять двузвенную ломаную из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Тогда (5.51) преобразуется либо в равенство

$$F(x, y) = C + \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy, \quad (5.52)$$

если движение из начальной точки идет по горизонтальному отрезку, либо в равенство

$$F(x, y) = C + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx, \quad (5.53)$$

если начальное движение идет по вертикальному отрезку.

В качестве фиксированной точки $(x_0; y_0)$ можно выбрать любую точку области D .

Пример 5.14. Найдем при помощи криволинейного интеграла второго рода функцию $F(x, y)$, если

$$dF(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy.$$

Сначала необходимо убедиться в том, что функция $F(x, y)$ существует. Непосредственной проверкой условия (5.45) убеждаемся, что выражение $(3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy$ на всей плоскости xOy является полным дифференциалом.

Полагая, что $x_0 = y_0 = 0$ в равенстве (5.52), получаем

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C + \int_0^x 3x^2 dx - \int_0^y (x^2 - 2xy + 3y^2) dy = \\ &= C + x^3 - x^2y + xy^2 - y^3. \end{aligned}$$

Если же использовать формулу (5.53) при том же предположении $x_0 = y_0 = 0$, получим тот же результат:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C - \int_0^y 3y^2 dy + \int_0^x (3x^2 - 2xy + y^2) dx = \\ &= C - y^3 + x^3 - x^2y + xy^2. \end{aligned}$$

Дополнение 5.1. Криволинейный интеграл в многосвязной области

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ являются непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой плоской многосвязной области D (рис. 5.17) и в этой области выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. Сформулированные условия отличаются от условий теоремы 5.4 только тем, что область не является односвязной, т.е. в этой области есть отверстия („дырки“), возможно, точечные. Что в этом случае

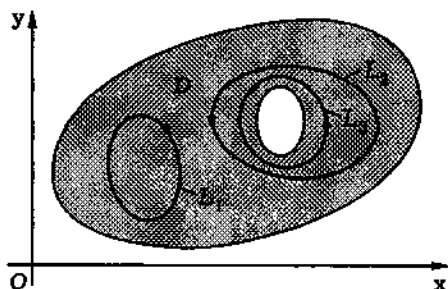


Рис. 5.17

можно сказать об интеграле

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (5.54)$$

где L — контур, целиком лежащий в области D ?

Если контур L не охватывает ни одного отверстия (например, контур L_1 на рис. 5.17), то его можно поместить в односвязную область $\tilde{D} \subset D$ и применить теорему 5.4. В результате получим, что интеграл (5.54) равен нулю. Если же контур охватывает хотя бы одно отверстие (например, контур L_2 на рис. 5.17), то интеграл (5.54) может быть ненулевым. Однако можно утверждать следующее: все такие интегралы, взятые в положительном направлении по всевозможным контурам, охватывающим данное отверстие один раз, равны между собой. Действительно, пусть L_2 и L_3 — контуры, охватывающие одно и то же отверстие один раз (см. рис. 5.17). Если эти контуры не пересекаются, то они составляют границу двусвязной области. Применяв формулу Грина для многосвязной области, получим

$$\oint_{L_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_{L_3} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Если же контуры L_2 и L_3 пересекаются, то можно выбрать еще один контур L^* , охватывающий то же отверстие, но не

пересекающийся ни с L_2 , ни с L_3 (рис. 5.18). Тогда, как показано, интеграл по контуру L^* , с одной стороны, равен интегралу по контуру L_2 , а с другой — интегралу по контуру L_3 . Значит, и в этом случае интегралы по контурам L_2 и L_3 совпадают.

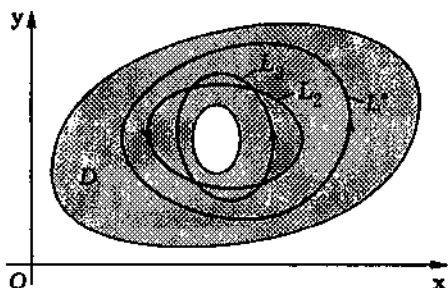


Рис. 5.18

Общее значение всех криволинейных интегралов по любому простому контуру, обходящему только один раз данное отверстие в положительном направлении, называют *циклической постоянной* данного отверстия. Для разных отверстий значения циклической постоянной в общем случае различны.

Пусть L — любой замкнутый контур, обходящий в положительном направлении только одно данное отверстие два раза (рис. 5.19). Тогда в силу свойства аддитивности криволинейного интеграла имеем

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 2\sigma,$$

где σ — циклическая постоянная данного отверстия. Если контур L обходит один раз в положительном направлении два отверстия (рис. 5.20), то

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где σ_1, σ_2 — циклические постоянные этих отверстий.

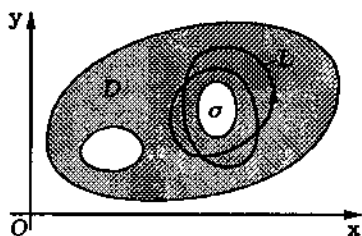


Рис. 5.19

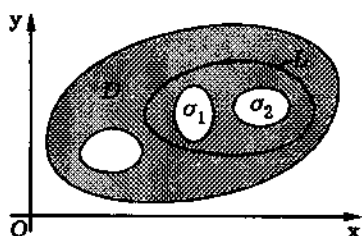


Рис. 5.20

Рассмотрим четырехсвязную область с тремя отверстиями, имеющими циклические постоянные σ_i , $i = 1, 2, 3$ (рис. 5.21). Пусть контур L обходит в положительном направлении два раза первое отверстие, один раз второе и три раза третье. Тогда получим

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 2\sigma_1 + \sigma_2 + 3\sigma_3.$$

В общем случае n -связной области при обходе в положительном направлении каждого из n отверстий значение интеграла (5.54) увеличивается на соответствующую циклическую постоянную, а при обходе в отрицательном направлении — уменьшается на ту же циклическую постоянную. Таким образом,

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i,$$

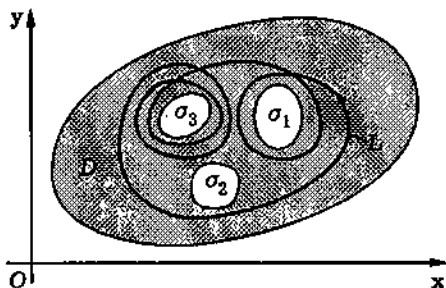


Рис. 5.21

где k_i — разность числа обходов контуром L отверстия с циклической постоянной σ_i в положительном и отрицательном направлениях.

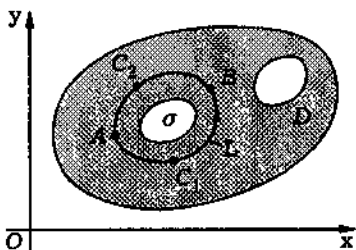


Рис. 5.22

Поскольку в многосвязной области значение криволинейного интеграла вдоль контура может быть ненулевым, то, согласно теореме 5.4, интеграл в этой области зависит от пути. Рассмотрим две кривые AC_1B и AC_2B , соединяющие точки A и B . Из этих двух кривых можно составить контур $L = AC_1BC_2A$. Если контур L обходит в положительном направлении отверстие, имеющее циклическую постоянную σ (рис. 5.22), то криволинейный интеграл вдоль этого контура равен σ . С учетом свойств криволинейного интеграла (см. 5.6) заключаем, что

$$\int_{AC_1B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AC_2B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \sigma.$$

Интегралы вдоль кривых AC_1B и AC_2B будут равны, если составленный из этих кривых контур не охватывает ни одно из отверстий.

Вопросы и задачи

5.1. Для криволинейного интеграла первого рода составить интегральную сумму функции $f(x,y) = x + y$, соответствующую разбиению отрезка прямой $y = x$ с концами $(0;0)$ и $(1;1)$ на n равных частей и выбору промежуточных точек M_k с абсциссами $\frac{k-1/\sqrt{2}}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Вычислить предел этой интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$.

5.2. Для криволинейного интеграла второго рода

$$\int_{AB} y dx + x dy,$$

где AB — отрезок с концами $A(-1; -2)$ и $B(2; 4)$, составить интегральную сумму, которая соответствует разбиению отрезка AB на n равных частей и выбору промежуточных точек $M_k\left(\frac{3k-n-2}{n}; \frac{6k-2n-4}{n}\right)$, $k = \overline{1, n}$. Вычислить предел этой интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$.

5.3. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} (x+y) ds$$

вдоль отрезка AB с концами $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$. Сравнить результат с пределом в задаче 5.1.

5.4. Вычислить следующие криволинейные интегралы первого рода:

а) от функции $f(x, y) = x + y$ вдоль границы треугольника с вершинами $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ и $C(0; 1)$;

б) от функции $f(y) = y^2$ вдоль арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

в) от функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = ax$;

г) от функции $f(z) = z$ вдоль конической винтовой линии $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $t \in [0, t_0]$;

д) от функции $f(x) = x^2$ вдоль линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и плоскости $x + y + z = 0$.

5.5. Найти массу материальной кривой с линейной плотностью $\rho = \text{const}$, если кривая задана параметрическими уравнениями:

а) $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, $t \in [0, \ln 3]$;

б) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ (дуга кривой между началом координат и точкой $A(3; 3; 2)$).

5.6. Найти массу материальной кривой $x^2/9 + y^2/4 = 1$, $y \leq 0$ (нижняя половина эллипса), имеющей линейную плотность $\rho(y) = -y$.

5.7. Найти координаты центра масс однородных кривых:

а) меньшей дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$, заключенной между точками $A(2; 0)$ и $B(-1; \sqrt{3})$;

б) границы сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

5.8. Для однородной дуги астроида, заданной соотношениями $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, найти координаты вектора статического момента, если линейная плотность дуги равна ρ .

5.9. Найти моменты инерции относительно осей координат одного витка однородной винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t/(2\pi)$, $t \in [0, 2\pi]$, если ее линейная плотность равна ρ .

5.10. Найти проекции на оси координат силы, с которой материальная однородная полуокружность массой m , заданная соотношениями $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, притягивает материальную точку $M_0(0; 0)$ массой m_0 .

5.11. Криволинейный интеграл второго рода из задачи 5.2 свести к криволинейному интегралу первого рода и, вычислив его, сравнить с результатом, найденным в задаче 5.2.

5.12. Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода для указанных подынтегральных выражений:

а) $(4x + y)dx + (x + 4y)dy$ вдоль кривой AB с концевыми точками $A(0; 0)$ и $B(-1; 1)$, заданной уравнением $y = x^4$;

б) $(x+y)dx + (x-y)dy$ вдоль окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, проходимой в положительном направлении;

в) $(y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$ вдоль кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in [0, 1]$, проходимой в направлении возрастания параметра t ;

г) $(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy - (x^2 - y^2)dz$ вдоль границы сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$,

направление обхода которого выбрано так, что движение от точки $A(1;0;0)$ к точке $B(0;1;0)$ происходит по кратчайшему пути.

5.13. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{OA} x dy - y dx$$

вдоль кривой, соединяющей точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$, если:

- OA — отрезок прямой;
- OA — дуга параболы, осью симметрии которой является координатная ось Oy ;
- OA — ломаная, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA , параллельного оси Oy .

5.14. Вычислить работу силы F вдоль кривой AB , если $F = \{y; -x\}$, а AB — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$ с концевыми точками $A(-1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$ и $B(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$, причем движение от A к B соответствует отрицательному направлению на окружности.

5.15. Вычислить работу силы F вдоль замкнутого контура L при обходе его в положительном направлении, если:

- $F = \{x - y; 2x + y\}$, а L — треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(3;3)$ и $C(3;-1)$;
- $F = \{x + y; y - x\}$, а L — эллипс $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$.

5.16. С помощью формулы Грина вычислить криволинейные интегралы второго рода от следующих подынтегральных выражений (указанные контуры обходятся в положительном направлении):

- $xy^2 dy - x^2 dx$, L — окружность $x^2 + y^2 = a^2$;
- $(x + y) dx - (x - y) dy$, L — эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
- $e^{-x^2-y^2}(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

5.17. С помощью криволинейных интегралов вычислить площади областей, ограниченных заданными кривыми:

- а) эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;
 б) гиперболой $y = 1/x$, координатной осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 2$;
 в) параболой $2ax^2 = y + a$, $a > 0$, и координатной осью Ox .

5.18. Доказать, что следующие подынтегральные выражения являются полными дифференциалами, и вычислить криволинейный интеграл от этих выражений вдоль кривой между заданными точками A и B :

- а) $(x + y) dx + (x - y) dy$, $A(0;0)$, $B(2;3)$;
 б) $x dx + y^2 dy$, $A(1;1)$, $B(2;3)$.

5.19. С помощью криволинейного интеграла найти функцию $u(x, y)$, если:

- а) $du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$;
 б) $du = (y \cos xy - 2x \sin(x^2 - y^2)) dx + (x \cos xy + 2y \sin(x^2 - y^2)) dy$.

5.20. Дважды непрерывно дифференцируемую в области D функцию $u(x, y)$ называют гармонической в D , если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x; y) \in D.$$

Доказать, что функция $u(x, y)$ является гармонической в односвязной области D , если она имеет в D непрерывные частные производные второго порядка и криволинейный интеграл по любому гладкому контуру L , целиком лежащему в D , от производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ по направлению внешней нормали n к контуру L равен нулю.

5.21. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

если L — простой контур, охватывающий начало системы координат. Зависит ли результат от выбора контура L ?

6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. О задании поверхности в пространстве

Поверхность в пространстве может быть задана различными способами [V]. Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат $Oxuz$ с ортонормированным базисом i, j, k .

Поверхность в пространстве может быть задана как график некоторой непрерывной функции

$$z = f(x, y), \quad (x; y) \in G \subset \mathbb{R}^2. \quad (6.1)$$

Аналогичны случаи, отличающиеся другим сочетанием переменных:

$$x = f(y, z), \quad (y; z) \in G_1 \subset \mathbb{R}^2, \quad (6.2)$$

или

$$y = f(x, z), \quad (x; z) \in G_2 \subset \mathbb{R}^2. \quad (6.3)$$

В этих трех случаях поверхность называют *явно заданной поверхностью*.

Поверхность в пространстве может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (6.4)$$

которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Тогда ее называют *явно заданной поверхностью*. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (6.5)$$

задает в пространстве \mathbb{R}^3 поверхность, представляющую собой сферу радиуса R с центром в начале координат.

Наконец, поверхность Φ может быть задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (6.6)$$

где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — непрерывные функции в их области определения D . В этом случае говорят о *параметрически заданной поверхности*. Например, сфера радиуса R с центром в начале координат может быть описана не только как неявно заданная поверхность (6.5), но и как поверхность, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = R \cos u, \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi. \quad (6.7)$$

Так как между точками пространства и их радиус-векторами установлено взаимно однозначное соответствие (точке $M(x; y; z)$ соответствует ее радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$), уравнения (6.6) можно записать в виде

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \quad (6.8)$$

Таким образом, мы получаем векторное уравнение поверхности Φ .

В дальнейшем будем считать, что если поверхность Φ задана параметрическими уравнениями (6.6), то функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Область определения D функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ является замкнутой ограниченной областью, граница ∂D которой — простой кусочно гладкий контур.

2. Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в D , т.е. определены в некоторой области, целиком

содержащей D , и имеют в этой области частные производные первого порядка, непрерывные в D .

3. Отображение $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi$, определяемое тремя функциями $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, является инъекцией, т.е. различным точкам $(u; v) \in D$ соответствуют различные точки $(x; y; z)$ поверхности Φ .

Если условие 3 распространяется и на граничные точки области D , то поверхность Φ будем называть *простой поверхностью*. Множество точек поверхности, соответствующих граничным точкам области D , образует в таком случае *границу* (или *край*) этой *поверхности*. На рис. 6.1, а изображена ограниченная контуром $ABCEA$ замкнутая область

$$D = \{(u; v): 0 < a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^2$$

(прямоугольник). Функции $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$, определенные в D , задают простую поверхность, которая представляет собой часть прямого кругового конуса (рис. 6.1, б). Границей (краем) этой поверхности является контур $A'B'C'E'A'$ на конусе, соответствующий контуру $ABCEA$ на плоскости.

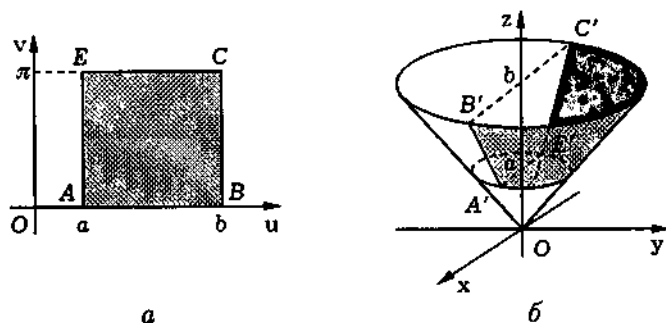


Рис. 6.1

Точки поверхности, не принадлежащие ее границе, называют *внутренними точками поверхности*. Поверхность может не иметь границы. Такую *поверхность* называют *замкнутой*. Примером замкнутой поверхности является сфера.

Поверхность Φ будем называть *гладкой поверхностью*, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность в пространстве, что часть поверхности Φ , попадающая в эту окрестность, может быть представлена как явно заданная поверхность одним из уравнений (6.1)–(6.3), причем функция f является непрерывно дифференцируемой. В каждой внутренней точке гладкой поверхности существуют *касательная плоскость* и *нормаль к этой поверхности* [V].

Пусть поверхность Φ задана параметрически при помощи уравнений (6.6), в которых функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в D . Если в точке $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Phi$, соответствующей точке $(u_0; v_0) \in D$, векторы

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_u = x'_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + y'_u(u_0, v_0)\mathbf{j} + z'_u(u_0, v_0)\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_v = x'_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + y'_v(u_0, v_0)\mathbf{j} + z'_v(u_0, v_0)\mathbf{k} \end{cases} \quad (6.9)$$

не являются коллинеарными, то такую *точку поверхности* Φ называют *неособой* (или *регулярной*). В противном случае точку $M_0 \in \Phi$ называют *особой точкой поверхности* Φ . Поверхность, не имеющая особых точек, является гладкой.

Касательная плоскость, построенная в неособой внутренней точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхности Φ , соответствующей точке $(u_0; v_0) \in D$ (т.е. $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$), может быть задана общим уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (6.10)$$

в котором A, B, C — координаты вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ нормали к поверхности Φ в точке $M_0 \in \Phi$ [V], являющегося одновременно и *нормальным вектором касательной плоскости* в этой точке. Используя правило вычисления векторного произведения в прямоугольных координатах [III], получаем

$$\begin{cases} A = y'_u(u_0, v_0)z'_v(u_0, v_0) - y'_v(u_0, v_0)z'_u(u_0, v_0), \\ B = z'_u(u_0, v_0)x'_v(u_0, v_0) - z'_v(u_0, v_0)x'_u(u_0, v_0), \\ C = x'_u(u_0, v_0)y'_v(u_0, v_0) - x'_v(u_0, v_0)y'_u(u_0, v_0). \end{cases} \quad (6.11)$$

Векторы τ'_u и τ'_v , отложенные от точки $M_0 \in \Phi$, лежат в касательной плоскости P (рис. 6.2).

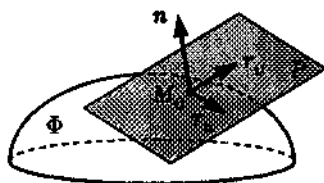


Рис. 6.2

6.2. Односторонние и двусторонние поверхности

Установим важное для дальнейшего изложения понятие стороны поверхности. В ряде случаев это понятие интуитивно ясно. Если поверхность задана явно, например, уравнением $z = z(x, y)$, то можно говорить о ее верхней или нижней стороне. Замкнутая поверхность ограничивает некоторую область в пространстве, и можно различать внутреннюю сторону этой поверхности, обращенную к области, и внешнюю сторону, обращенную вовне. Исходя из таких интуитивных представлений дадим определение стороны поверхности.

Рассмотрим гладкую поверхность Φ , замкнутую или же ограниченную кусочно гладким контуром L . В каждой внутренней точке такой поверхности существуют касательная плоскость и нормальный вектор. Нормальный вектор может иметь одно из двух возможных направлений. Пусть в окрестности точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхность можно задать параметрически уравнениями (6.6) с помощью гладких функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Тогда в качестве единичного вектора нормали можно выбрать вектор

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}, \quad (6.12)$$

где векторы τ'_u и τ'_v определены соотношениями (6.9). Вектор n является непрерывной функцией в некоторой окрестности точки M_0 . Выбор единичного вектора нормали позволяет задать сторону поверхности в окрестности точки M_0 . Для выбора противоположной стороны достаточно взять вектор с противоположным знаком.

Итак, в случае гладкой поверхности в окрестности любой ее точки можно указать непрерывно меняющийся единичный вектор нормали. Если в каждой точке поверхности можно выбрать единичный вектор нормали так, что получится векторная функция, непрерывная на всей поверхности, то такую поверхность называют *двусторонней поверхностью*. Если для поверхности Φ не существует непрерывного единичного вектора нормали, то ее называют *односторонней поверхностью*.

Пример 6.1. а. Явно заданную поверхность $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D$, где функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в D , можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u; v) \in D.$$

При таком описании поверхности имеем

$$\mathbf{r}'_u = \mathbf{i} + f'_u(u, v)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'_v = \mathbf{j} + f'_v(u, v)\mathbf{k}.$$

Вычислим векторное произведение этих векторов:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = -f'_u(u, v)\mathbf{i} - f'_v(u, v)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

После нормировки находим

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} = \frac{-f'_u\mathbf{i} - f'_v\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}}, \quad (6.13)$$

где для удобства аргументы u функции $f(u, v)$ и ее частных производных опущены.

Легко убедиться в том, что векторная функция $\mathbf{n}(u, v)$ непрерывна в области определения D функции $f(u, v)$. Таким образом, явно заданная поверхность $z = f(u, v)$, $(u; v) \in D$, является двусторонней.

б. Пусть поверхность, заданная параметрическими уравнениями (6.6), не имеет особых точек. Тогда равенство (6.12) определяет векторную функцию $\mathbf{n}(u, v)$ единичной нормали, непрерывную в D . Ясно, что в этом случае мы имеем дело с двусторонней поверхностью.

в. Пусть поверхность S задана неявно уравнением (6.4), в котором функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Если в каждой точке $(x; y; z) \in S$ градиент функции $F(x, y, z)$ отличен от нуля, то поверхность S является гладкой и не имеет особых точек. При этом вектор

$$F'_x(x, y, z)\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

есть нормальный вектор касательной плоскости к поверхности S в точке $(x; y; z) \in S$. Нормируя этот вектор, получим непрерывную вектор-функцию

$$\mathbf{n} = \frac{F'_x\mathbf{i} + F'_y\mathbf{j} + F'_z\mathbf{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

которая в каждой точке поверхности S задает единичный вектор нормали к этой поверхности. Таким образом, в данном случае поверхность S является двусторонней.

Остановимся на частном случае — сфере радиуса R , заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В этом случае $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ — непрерывно дифференцируемая в \mathbb{R}^3 функция, причем ее градиент $\text{grad} F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ обращается в нуль в единственной точке $O(0; 0; 0)$, не лежащей на сфере. Следовательно, сфера — двусторонняя поверхность,

а непрерывная функция единичной нормали к поверхности имеет вид

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{R}\mathbf{i} + \frac{y}{R}\mathbf{j} + \frac{z}{R}\mathbf{k}.$$

Эта функция определяет внешнюю сторону сферы. #

Приведенный пример показывает, что на практике большинство рассматриваемых поверхностей являются двусторонними. Существуют ли односторонние поверхности? Чтобы выяснить это, подробнее изучим вопрос, по каким причинам векторная функция (6.12), которая определена в окрестности любой точки гладкой поверхности, может не существовать на всей поверхности.

Возьмем на поверхности Φ контур L_0 , выбрав в качестве начальной некоторую точку M_0 . Если поверхность двусторонняя, то на выбранном контуре определена непрерывная векторная функция, значением которой является единичный вектор нормали к поверхности. Но единичный вектор нормали в каждой точке поверхности может принимать лишь два возможных значения. Поэтому, задав единичный вектор нормали в точке M_0 , мы тем самым однозначно определяем векторную функцию в некоторой окрестности точки M_0 . Обойдя весь контур, мы вернемся в точку M_0 с однозначно определенным единичным вектором нормали. При этом возможны две ситуации: либо конечное положение вектора нормали совпадет с начальным, либо нет. В последнем случае можно сделать вывод, что на поверхности нельзя задать непрерывное изменение единичного вектора нормали и что эта поверхность является односторонней. Простейшим примером односторонней поверхности является *лист Мебиуса**. Эту поверхность можно представить следующим образом. Возьмем прямоугольную полоску $ABCD$ бумаги и склеим ее противоположные стороны AB и CD , перевернув эту полоску один раз (рис. 6.3). Выбор той или иной сто-

* А. Ф. Мёбиус (1790–1868) — немецкий математик.

роны полоски определяется выбором единичного вектора нормали. Если контур на поверхности пересекает линию склейки, то происходит переход с одной стороны полоски на другую. В результате при обходе по такому контуру единичный вектор нормали меняет направление.

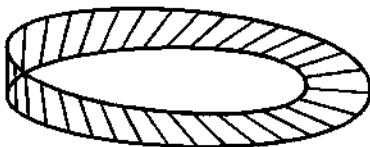


Рис. 6.3

Если поверхность Φ двусторонняя, то на ней существует всего лишь два способа выбора непрерывного единичного вектора нормали. Задав в каждой точке единичный вектор нормали так, чтобы он менялся непрерывно, мы тем самым определяем сторону поверхности. Поэтому в дальнейшем под *стороной поверхности* мы будем понимать заданную на этой поверхности непрерывную функцию вектора единичной нормали.

6.3. Площадь поверхности

Для вычисления площади *гладкой поверхности* Φ , заданной *параметрическими уравнениями* (6.6), можно использовать *теорему о неявной функции*, в силу которой поверхность в окрестности произвольной ее *неособой точки* M_0 можно представить как график функции, разрешив параметрические уравнения относительно двух из трех переменных x, y, z . Однако пересчет результата для получения формулы площади поверхности в этом случае достаточно трудоемкий. Поэтому мы используем другой подход.

Для замкнутой области D — области определения функций $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ — выберем некоторое разбиение T_D на *частичные области* $D_i, i = \overline{1, n}$. Каждой частичной области

D_i соответствует некоторая часть Φ_i поверхности Φ . Части Φ_i будем называть *частичными областями* поверхности Φ , а их совокупность T — *разбиением* поверхности Φ . Таким образом, любое разбиение поверхности определяется каким-либо разбиением области определения функций в правых частях параметрических уравнений (6.6).

В каждой частичной области Φ_i разбиения T выберем произвольным образом точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Предположим, что диаметр $d(T)$ разбиения T , т.е. максимальный из диаметров частичных областей, настолько мал, что проекция D_i^* частичной области Φ_i на касательную плоскость к поверхности Φ в точке M_i является взаимно однозначной, т.е. различные точки Φ_i имеют различные проекции на касательную плоскость.

Выберем некоторую частичную область Φ_i и зафиксируем. В точке M_i построим прямоугольную систему координат $M_i\xi\eta\zeta$, соприкасающуюся с поверхностью (согласованную с поверхностью), т.е. такую систему координат, для которой плоскость $\xi M_i\eta$ совпадает с касательной плоскостью к поверхности в точке M_i , а ось $M_i\zeta$ направлена по нормали к поверхности. В окрестности точки M_i поверхность Φ можно задать уравнениями

$$\begin{cases} \xi = \xi(u, v), \\ \eta = \eta(u, v), \\ \zeta = \zeta(u, v), \end{cases} \quad (u; v) \in D. \quad (6.14)$$

Благодаря такому выбору системы координат $M_i\xi\eta\zeta$ имеем $\zeta'_u(u_i, v_i) = \zeta'_v(u_i, v_i) = 0$, где u_i и v_i — значения параметров, соответствующие точке M_i . Плоская область D_i^* расположена в координатной плоскости $M_i\xi\eta$, и ее площадь ΔS_i можно подсчитать следующим образом:

$$\Delta S_i = \iint_{D_i^*} d\xi d\eta = \iint_{D_i} |J(u, v)| du dv,$$

где $J(u, v)$ — якобиан отображения (6.14) в точке $(u; v) \in D_i$. В последнем интеграле подынтегральную функцию $|J(u, v)|$ заменим константой $|J(u_i, v_i)|$. Получим для площади ΔS_i приближенное значение $|J(u_i, v_i)|\Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ — площадь замкнутой области D_i в плоскости переменных u и v . Погрешность δ_i этого приближения можно оценить следующим образом:

$$\delta_i \leq \max_{(u;v) \in D_i} |J(u_i, v_i) - J(u, v)| \Delta\sigma_i. \quad (6.15)$$

Для значения $J(u_i, v_i)$ имеем

$$J(u_i, v_i) = \begin{vmatrix} \xi'_u(u_i, v_i) & \xi'_v(u_i, v_i) \\ \eta'_u(u_i, v_i) & \eta'_v(u_i, v_i) \end{vmatrix} = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|.$$

Суммируя оценки (6.15) по всем частичным областям Φ_i разбиения T , заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \Delta S_i - \sum_{i=1}^n |J(u_i, v_i)| \Delta\sigma_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n \max_{D_i} |J(u_i, v_i) - J(u, v)| \Delta\sigma_i \leq \\ &\leq \max_{i=1, n} \max_{D_i} |J(u_i, v_i) - J(u, v)| \sigma, \end{aligned}$$

где σ — площадь замкнутой области D . При стремлении к нулю диаметра $d(T)$ разбиения T поверхности Φ к нулю стремится и диаметр $d(T_D)$ разбиения T_D замкнутой области D . При этом

$$\max_{i=1, n} \max_{D_i} |J(u_i, v_i) - J(u, v)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad d(T) \rightarrow 0.$$

Следовательно, сумма $\sum_{i=1}^n |J(u_i, v_i)| \Delta\sigma_i$ при $d(T) \rightarrow 0$ стремится к площади поверхности Φ . Но в то же время эта сумма является интегральной для двойного интеграла по области D от функции $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$. Таким образом, площадь S поверхности Φ можно вычислить по формуле

$$S = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv. \quad (6.16)$$

Введем функции

$$E = (\mathbf{r}'_u)^2 = (x'_u(u, v))^2 + (y'_u(u, v))^2 + (z'_u(u, v))^2, \quad (6.17)$$

$$F = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = x'_u(u, v) x'_v(u, v) + y'_u(u, v) y'_v(u, v) + z'_u(u, v) z'_v(u, v), \quad (6.18)$$

$$G = (\mathbf{r}'_v)^2 = (x'_v(u, v))^2 + (y'_v(u, v))^2 + (z'_v(u, v))^2. \quad (6.19)$$

Нетрудно проверить, что

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 = (\mathbf{r}'_u)^2 (\mathbf{r}'_v)^2 - (\mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v)^2 = EG - F^2. \quad (6.20)$$

Поэтому представление (6.16) можно записать в виде

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (6.21)$$

Выражение

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (6.22)$$

называют *элементом площади поверхности* (или *элементом площади в криволинейных координатах*).

До сих пор мы ограничивались случаем гладкой поверхности. Однако формула (6.21) для площади поверхности верна в более общем случае кусочно гладкой поверхности. Действительно, такую поверхность можно разбить на конечное число гладких поверхностей, для каждой из которых формула площади поверхности верна. Значит, в силу аддитивности площади и двойного интеграла она верна и для всей кусочно гладкой поверхности. Отметим также, что формула (6.21) верна и для гладких поверхностей, имеющих особые точки, если множество особых точек сосредоточено на некотором конечном числе гладких кривых. Используя эти кривые как разрезы, мы можем разбить поверхность на составные части, не имеющие особых точек.

Легко убедиться, что в простейшем случае поверхности Φ , заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, формула (6.21) может быть сведена к формуле (1.63). Действительно, достаточно записать параметрическое представление

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u; v) \in D,$$

где D — область определения функции $f(x, y)$. Тогда

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = 1 + (f'_u)^2,$$

$$F = x'_v x'_u + y'_v y'_u + z'_v z'_u = f'_u f'_v,$$

$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = 1 + (f'_v)^2,$$

откуда

$$EG - F^2 = (1 + (f'_u)^2)(1 + (f'_v)^2) - (f'_u f'_v)^2 = 1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2.$$

Пример 6.2. Вычислим площадь S части гиперболического параболоида $z = xy$, вырезаемой прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 8$ (рис. 6.4).

В данном случае поверхность является графиком функции $f(x, y) = xy$ с областью определения

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

В этой области функция $f(x, y) = xy$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x = y$ и $f'_y = x$. Поэтому площадь поверхности можно вычислить по формуле (1.63). Подставляя значения частных производных в эту формулу, находим

$$S = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2} \, dx \, dy.$$

Для вычисления этого двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам r, φ , в которых

$$D = \{(r; \varphi) \in \mathbb{R}^2: r \in [0, \sqrt{8}], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Тогда получим

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} r \sqrt{1+r^2} dr = 2\pi \frac{(1+r^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^{\sqrt{8}} = \frac{52}{3}\pi.$$

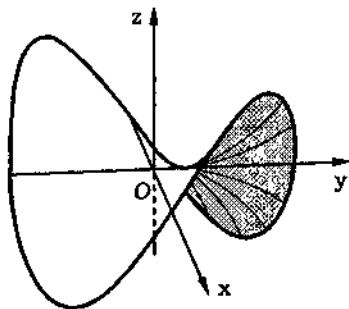


Рис. 6.4

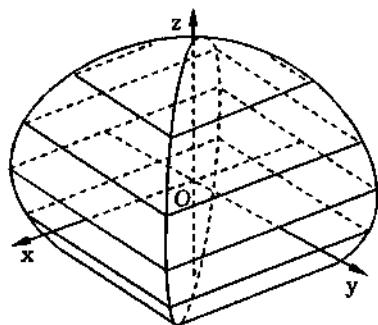


Рис. 6.5

Пример 6.3. Найдем площадь S поверхности тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$ (рис. 6.5).

Исключая z из этих уравнений, получаем уравнения $y = \pm x$ проекций линий пересечения цилиндров на плоскость xOy . Учитывая, что рассматриваемое тело симметрично относительно координатных плоскостей, а также относительно плоскостей $y = \pm x$, при вычислении площади поверхности этого тела достаточно рассмотреть участок цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = a^2$, расположенный в первом октанте. Этот участок ограничен плоскостями xOy , xOz и $y = x$ и составляет шестнадцатую часть рассматриваемой поверхности. Его можно задать явно уравнением $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, в котором функция

$z = f(x, y)$ имеет треугольную область определения

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, a], y \leq x\}.$$

В замкнутой области D функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y = 0$. Частная производная $f'_x = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$ непрерывна в D всюду, кроме точек прямой $x = a$, причем в окрестности каждой такой точки она не ограничена. Тем не менее использовать формулу (1.63) можно. Она приводит к несобственному двойному интегралу по замкнутой области D . Непосредственное вычисление несобственного интеграла доказывает его сходимость и дает площадь рассматриваемой поверхности:

$$\begin{aligned} S &= 16 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx dy = 16 \int_0^a \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^x dy = \\ &= 16 \int_0^a \frac{ax dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -16a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = 16a^2. \end{aligned}$$

Пример 6.4. Вычислим площадь S винтовой поверхности (прямого геликоида), заданной параметрическими уравнениями $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = vh$ ($h > 0$) и ограниченной плоскостями $z = 0$, $z = 2\pi h$ и цилиндрической поверхностью, заданной уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

Подставляя уравнение $z = vh$ в уравнения ограничивающих плоскостей, устанавливаем, что $v \in [0, 2\pi]$. Возводя первые два параметрических уравнения в квадрат и подставляя в уравнение, задающее цилиндрическую поверхность, находим, что для точек этой поверхности $u^2 = a^2$. Следовательно, u , v и z являются цилиндрическими координатами точек рассматриваемого участка винтовой поверхности, причем в качестве области D определения функций, задающих этот участок, можно принять круг радиуса a :

$$D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2: u \in [0, a], v \in [0, 2\pi]\}.$$

Используя представления (6.17)–(6.19), находим

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = \\ = \cos v \cdot (-u \sin v) + \sin v \cdot u \cos v + 0 \cdot h = 0,$$

$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + h^2 = u^2 + h^2.$$

Подставляя эти соотношения в (6.21), имеем

$$S = \iint_D \sqrt{u^2 + h^2} du dv = \int_0^a \sqrt{u^2 + h^2} du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int_0^a \sqrt{u^2 + h^2} du.$$

Интеграл в правой части этого равенства вычислим интегрированием по частям с использованием таблицы интегралов [VI]:

$$I = \int \sqrt{u^2 + h^2} du = u\sqrt{u^2 + h^2} - \int \frac{(u^2 + h^2) - h^2}{\sqrt{u^2 + h^2}} du = \\ = u\sqrt{u^2 + h^2} - I + h^2 \ln|u + \sqrt{u^2 + h^2}|.$$

Отсюда находим выражение для I и в итоге получаем

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{u^2 + h^2} du = \\ = \pi \left(u\sqrt{u^2 + h^2} + h^2 \ln|u + \sqrt{u^2 + h^2}| \right) \Big|_0^a = \\ = \pi \left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln|a + \sqrt{a^2 + h^2}| - h^2 \ln h \right).$$

6.4. Поверхностный интеграл первого рода

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой такое же естественное обобщение *двойного интеграла*, каким является *криволинейный интеграл первого рода* по отношению

к обычному определенному интегралу. Это обобщение строится на основе определения *площади криволинейной поверхности*.

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть на некоторой *двусторонней гладкой* (или *кусочно гладкой*) *поверхности* Φ , ограниченной кусочно гладким контуром L , определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Выберем разбиение поверхности Φ на конечное число *частичных областей* Φ_i , $i = \overline{1, n}$, с площадями ΔS_i . В каждой частичной области Φ_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i) \in \Phi_i$. Пусть d — максимальный из диаметров d_i частичных областей Φ_i , $i = \overline{1, n}$. Сумму

$$S'_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (6.23)$$

назовем *интегральной суммой* для функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ .

Определение 6.1. Если интегральная сумма (6.23) при $d \rightarrow 0$ имеет конечный предел I , не зависящий ни от способа разбиения поверхности Φ на частичные области $\Phi_i \subset \Phi$, $i = \overline{1, n}$, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i) \in \Phi_i$, то этот предел называют *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ и обозначают

$$I = \int_{\Phi} f(x, y, z) dS.$$

Итак, используя (6.23), имеем

$$I = \int_{\Phi} f(x, y, z) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \quad (6.24)$$

Раскрывая смысл предельного перехода в (6.24), устанавливаем следующее: число I называют *поверхностным интегралом*

первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении поверхности Φ на частичные области $\Phi_i \subset \Phi$, $i = \overline{1, n}$, с диаметрами d_i и площадями ΔS_i , подчиненными единственному условию $d = \max_{i=\overline{1, n}} d_i < \delta(\varepsilon)$, и при произвольном выборе точек

$M_i(x_i; y_i; z_i) \in \Phi_i$ выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \right| < \varepsilon. \quad (6.25)$$

Из определения 6.1 поверхностного интеграла первого рода следует, что он не зависит от выбора *стороны поверхности*.

Теорема 6.1. Пусть Φ — гладкая поверхность, не имеющая особых точек и заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках $M \in \Phi$, включая край поверхности Φ . Тогда поверхностный интеграл первого рода (6.24) существует и может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где функции E, F, G переменных u и v определены соотношениями (6.17)–(6.19).

« Согласно определению, разбиению T поверхности Φ на частичные области Φ_i , $i = \overline{1, n}$, отвечает разбиение T_D области D

определения функций в параметрических уравнениях (6.6) на частичные области D_i . Если к нулю стремится диаметр $d(T)$ разбиения T , то диаметр $d(T_D)$ разбиения T_D также стремится к нулю, и наоборот.

Итак, выберем разбиение T поверхности Φ на частичные области Φ_i и соответствующее ему разбиение T_D замкнутой области D на частичные области D_i , $i = \overline{1, n}$. В каждой частичной области Φ_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Этой точке отвечает точка $(u_i; v_i)$ в частичной области D_i , так что

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i). \quad (6.27)$$

В соответствии с (6.21) для площади поверхности ΔS_i частичной области Φ_i имеем

$$\Delta S_i = \iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Применяя теорему о среднем значении для двойного интеграла, получаем

$$\Delta S_i = \sqrt{\tilde{E}_i \tilde{G}_i - \tilde{F}_i^2} \Delta \tilde{S}_i,$$

где \tilde{E}_i , \tilde{F}_i , \tilde{G}_i — значения функций E , F , G в некоторой точке $(\tilde{u}_i; \tilde{v}_i) \in D_i$, а $\Delta \tilde{S}_i$ — площадь D_i . Тогда интегральную сумму (6.23) для поверхностного интеграла в левой части (6.26) с учетом (6.27) можно представить в виде

$$S'_n = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \sqrt{\tilde{E}_i \tilde{G}_i - \tilde{F}_i^2} \Delta \tilde{S}_i.$$

Отличие суммы S'_n от интегральной суммы

$$S''_n = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \sqrt{E_i G_i - F_i^2} \Delta \tilde{S}_i$$

для двойного интеграла в правой части (6.26), в которой E_i , F_i , G_i — значения E , F , G в точке $(x_i; y_i)$, состоит в том, что слагаемые в S_n'' вычислены в произвольной точке $(u_i; v_i) \in D_i$, тогда как в S_n' множитель $\sqrt{EG - F^2}$ в каждом из слагаемых вычислен в точке $(\tilde{u}_i; \tilde{v}_i) \in D_i$, положение которой диктуется теоремой о среднем значении для двойного интеграла.

Рассмотрим разность

$$|S_n' - S_n''| = \sum_{i=1}^n f_i \left(\sqrt{\tilde{E}_i \tilde{G}_i - \tilde{F}_i^2} - \sqrt{E_i G_i - F_i^2} \right) \Delta \tilde{S}_i,$$

где $f_i = f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$. Поскольку сложная функция $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ непрерывна в замкнутой области D , то она и ограничена в этой области, т.е. $|f(x, y)| \leq K$ в D для некоторой константы K . Следовательно, $|f_i| \leq K$, $i = \overline{1, n}$. Функция $\sqrt{EG - F^2}$ также непрерывна в D . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения замкнутой области D с диаметром \tilde{d} , меньшим $\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$\Delta = \left| \sqrt{\tilde{E}_i \tilde{G}_i - \tilde{F}_i^2} - \sqrt{E_i G_i - F_i^2} \right| < \frac{\varepsilon}{K \tilde{S}},$$

где \tilde{S} — площадь области D . Значит, если $\tilde{d} = d(T_D) < \delta(\varepsilon)$, то

$$|S_n' - S_n''| < \frac{\varepsilon}{K \tilde{S}} K \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{S}_i = \varepsilon.$$

Это равносильно тому, что $\lim_{\tilde{d} \rightarrow 0} (S_n' - S_n'') = 0$.

Отсюда следует, что если сумма S_n'' имеет предел при $\tilde{d} \rightarrow 0$, то и сумма S_n' имеет тот же предел при $\tilde{d} \rightarrow 0$. Но при любом выборе точек $M_i \in \Delta \Phi_i$, $i = \overline{1, n}$, сумма S_n'' является интегральной суммой двойного интеграла в правой части (6.26),

который существует в силу непрерывности подынтегральной функции (см. теорему 1.5). Следовательно, существует и равный этому интегралу предел при $\tilde{d} \rightarrow 0$ суммы S'_n , являющийся, согласно определению 6.1, поверхностным интегралом первого рода в левой части (6.26). ►

В случае поверхности Φ , заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, формула (6.26) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{D^*} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где D^* — проекция поверхности Φ на плоскость xOy . Так как

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{|\cos \gamma|},$$

где γ — угол между вектором нормали к поверхности Φ и осью Oz , то (6.28) можно представить в виде

$$\int_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint_{D^*} f(x, y, z(x, y)) \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}. \quad (6.29)$$

При доказательстве теоремы 6.1 предполагалось, что поверхность Φ , по которой берется поверхностный интеграл первого рода в (6.26), является гладкой и незамкнутой. Отметим, что формула (6.26) справедлива и в случае *кусочно гладкой поверхности*, причем как незамкнутой, так и замкнутой.

Пример 6.5. Вычислим поверхностный интеграл первого рода I от функции $f(x, y, z) = z$ по поверхности Φ , являющейся частью гиперболического параболоида, заданного уравнением

$z = xy$, которая вырезана цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 4$. Используя (6.28), запишем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Phi} z dS = \iint_{D^*} z \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_{D^*} xy \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy, \end{aligned}$$

где D^* — замкнутый круг радиуса 2 с центром в начале координат. Как и в примере 6.2, перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} \cos \varphi \sin \varphi dr = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = 0. \quad \# \end{aligned}$$

Поверхностный интеграл первого рода по своей сути аналогичен двойному интегралу и на него распространяются основные свойства двойного интеграла: линейность, аддитивность, монотонность. Для поверхностного интеграла верна оценка по модулю, аналогичная соответствующей оценке двойного интеграла, а также следующий аналог теоремы о среднем для двойного интеграла.

Теорема 6.2 (теорема о среднем). Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на гладкой поверхности S с площадью S^* . Тогда на этой поверхности существует такая точка (x_0, y_0, z_0) , что выполняется равенство

$$\int_S f(x, y, z) dS = f(x_0, y_0, z_0) S^*. \quad \#$$

Как и в случае двойного интеграла, значение $f(x_0, y_0, z_0)$ называют *средним значением функции* $f(x, y, z)$ на поверхности S .

6.5. Приложения поверхностного интеграла первого рода

В пространстве введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с ортами (единичными векторами) i, j, k и рассмотрим материальную поверхность Φ , по которой распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$. Повторим описанный выше процесс разбиения поверхности (см. 6.4) на n частичных областей $\Phi_i, i = \overline{1, n}$, выбрав на каждой из них произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Phi_i$. При этом полагаем, что при малых диаметрах d_i частичных областей Φ_i поверхностная плотность распределенной по поверхности массы в пределах каждой частичной области постоянна и равна значению $\rho(M_i) = \rho(x_i, y_i, z_i)$.

При этих предположениях, как и в случае материальной кривой (см. 5.3), приходим к следующим выводам:

а) масса всей поверхности Φ равна

$$m = \int_{\Phi} \rho(M) dS = \int_{\Phi} \rho(x, y, z) dS; \quad (6.30)$$

б) статические моменты этой поверхности относительно координатных плоскостей yOz, zOx и xOy равны

$$\begin{cases} K_x = \int_{\Phi} x\rho(x, y, z) dS, \\ K_y = \int_{\Phi} y\rho(x, y, z) dS, \\ K_z = \int_{\Phi} z\rho(x, y, z) dS, \end{cases} \quad (6.31)$$

где x, y, z — координаты точки $M \in \Phi$;

в) координаты центра масс поверхности Φ имеют вид

$$x_C = \frac{K_x}{m}, \quad y_C = \frac{K_y}{m}, \quad z_C = \frac{K_z}{m}; \quad (6.32)$$

г) моменты инерции этой поверхности относительно, например, плоскости yOz , оси Ox и начала координат равны соответственно

$$J_{yOz} = \int_{\Phi} x^2 \rho(x, y, z) dS,$$

$$J_{Ox} = \int_{\Phi} \int_{\Phi} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS,$$

$$J_O = \int_{\Phi} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS;$$

д) проекции на координатные оси вектора F силы притяжения, с которой материальная поверхность Φ притягивает материальную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 , равны соответственно

$$\begin{cases} F_x = Gm_0 \int_{\Phi} \frac{x - x_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS, \\ F_y = Gm_0 \int_{\Phi} \frac{y - y_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS, \\ F_z = Gm_0 \int_{\Phi} \frac{z - z_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS, \end{cases} \quad (6.33)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$; G — гравитационная постоянная.

Приведенные соотношения связаны с приложениями поверхностного интеграла первого рода в механике. Аналогично можно получить формулы для вычисления величин, имеющих иной физический смысл.

В качестве примера найдем в некоторой точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ вектор E напряженности электрического поля, создаваемого заряженной поверхностью Φ с плотностью $\rho_e(M) = \rho_e(x, y, z)$

распределения электрических зарядов. Примем, что заряд элементарного участка $\Phi_i \subset \Phi$ этой поверхности, имеющего площадь ΔS_i , $i = \overline{1, n}$, равен $q_i = \rho_e(M_i)\Delta S_i = \rho_e(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$, где $M(x_i; y_i; z_i) \in \Phi_i$ — произвольная точка этого участка. При малом диаметре d_i участка Φ_i можно считать, что этот заряд сосредоточен в точке M_i .

Из курса физики известно, что модуль вектора E_i напряженности электрического поля в точке M_0 , находящейся на расстоянии $r_i = r(M_i M_0) = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}$ от точечного заряда q_i , расположенного в точке M_i , равен в условиях вакуума $|E_i| = q_i / (4\pi\epsilon_0 r_i^2)$, где ϵ_0 — электрическая постоянная. Пусть α_i — угол между вектором E_i и осью Ox . Тогда проекция этого вектора на ось Ox будет равна

$$E_{ix} = |E_i| \cos \alpha_i = \frac{q_i \cos \alpha_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \frac{\rho_e(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \frac{x_0 - x_i}{r_i}.$$

Суммируя выражения для проекций E_{ix} по всем элементарным участкам $\Phi_i \subset \Phi$, $i = \overline{1, n}$, и переходя к пределу при $d \rightarrow 0$, где $d = \max_{i=\overline{1, n}} d_i$, получаем проекцию на ось Ox

$$\begin{aligned} E_x &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_e(x_i, y_i, z_i)(x_0 - x_i)}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \Delta S_i = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Phi} \frac{\rho_e(x, y, z)(x_0 - x)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} dS \quad (6.34) \end{aligned}$$

вектора E напряженности в точке M_0 электрического поля, создаваемого поверхностью Φ . Аналогично можно найти выражения для проекций

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Phi} \frac{\rho_e(x, y, z)(y_0 - y)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} dS, \\ E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Phi} \frac{\rho_e(x, y, z)(z_0 - z)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} dS \end{aligned}$$

этого вектора на оси Oy и Oz соответственно. В итоге $E = E_x i + E_y j + E_z k$.

Пример 6.6. Электрический заряд Q равномерно распределен по сфере Φ радиуса R . Найдём вектор E напряжённости электрического поля в вакууме, создаваемого сферой, в точке M_0 , находящейся на расстоянии r_0 от центра сферы ($r_0 \neq R$).

Поместим в центре сферы начало прямоугольной декартовой системы координат так, чтобы ось Ox проходила через точку M_0 , которая в этом случае будет иметь координаты $M_0(r_0; 0; 0)$. Тогда в силу симметрии $E_y = E_z = 0$ и $E = E_x i$, причём, учитывая (6.34) и уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, имеем

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Phi} \frac{\rho_e(r_0 - x)}{((x - r_0)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dS = \\ &= \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0} \int_{\Phi} \frac{(r_0 - x) dS}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} = \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0} I, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где через I обозначен поверхностный интеграл по сфере Φ . Также в силу симметрии $E_x = 0$ при $r_0 = 0$, т.е. в случае размещения точки M_0 в центре сферы.

Координатная плоскость xOy делит сферу Φ на две полусферы, задаваемые уравнениями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, определёнными в замкнутом круге

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Для каждой из полусфер имеем

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

и

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Поэтому с учетом (6.28) и равенства $(x - r_0)^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r_0^2 - 2r_0x$, заключаем, что поверхностный интеграл I в (6.35) равен удвоенному двойному интегралу по кругу D :

$$I = 2 \iint_D \frac{r_0 - x}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

При изменении переменного интегрирования x на отрезке $[-R, R]$ имеем $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$. В результате получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D \frac{r_0 - x}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= 2R \int_{-R}^R \frac{(r_0 - x) dx}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= 2R \int_{-R}^R \frac{(r_0 - x) dx}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) = \\ &= 2\pi R \int_{-R}^R \frac{(r_0 - x) dx}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} = \frac{\pi R}{r_0} \int_{-R}^R \frac{(2r_0^2 - 2r_0x) dx}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} = \\ &= \frac{\pi R}{r_0} \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2r_0x}} + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0} \int_{-R}^R \frac{dx}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} = \\ &= -\frac{\pi R}{r_0^2} \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2r_0x} \Big|_{-R}^R + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2 \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2r_0x}} \Big|_{-R}^R. \end{aligned}$$

Подставляя пределы и учитывая, что все радикалы неотрицательны, находим

$$I = -\pi R \frac{|R - r_0| - (R + r_0)}{r_0^2} + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2} \left(\frac{1}{|R - r_0|} - \frac{1}{R + r_0} \right).$$

Если $r_0 < R$, то $|R - r_0| = R - r_0$ и

$$\begin{aligned} I &= -\pi R \frac{R - r_0 - (R + r_0)}{r_0^2} + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2} \left(\frac{1}{R - r_0} - \frac{1}{R + r_0} \right) = \\ &= \frac{2\pi R}{r_0} + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2} \frac{R + r_0 - R + r_0}{R^2 - r_0^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с (6.35) заключаем, что $E_x = 0$ внутри сферы, т.е. электрическое поле отсутствует. При $r_0 > R$ имеем $|R - r_0| = r_0 - R$ и

$$\begin{aligned} I &= -\pi R \frac{r_0 - R - (R + r_0)}{r_0^2} + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2} \left(\frac{1}{r_0 - R} - \frac{1}{R + r_0} \right) = \\ &= \frac{2\pi R^2}{r_0^2} + \pi R \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2} \frac{R + r_0 - r_0 + R}{r_0^2 - R^2} = \frac{4\pi R^2}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Учитывая (6.35), получаем

$$E_x = \frac{Q}{16\pi^2 \varepsilon_0} \frac{4\pi R^2}{r_0^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r_0^2},$$

т.е. сфера с равномерно распределенным электрическим зарядом Q создает в окружающем пространстве такое же электрическое поле, что и точечный заряд Q , помещенный в центр сферы.

Отметим, что к интегралу по x при вычислении I можно прийти и иным путем. Сферу можно рассматривать как поверхность вращения полуокружности, заданной уравнением $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, вокруг оси Ox . Тогда для дифференциала площади поверхности сферы находим $dS = 2\pi y(x) ds(x)$, причем дифференциал длины дуги полуокружности равен

$$ds(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad x \in (-R, R).$$

Таким образом, $dS = 2\pi R dx$, и после подстановки dS в (6.35) получаем для поверхностного интеграла I выражение

$$I = \int_{\Phi} \frac{(r_0 - x) dS}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}} = 2\pi R \int_{-R}^R \frac{(r_0 - x) dx}{(R^2 + r_0^2 - 2r_0x)^{3/2}}.$$

Используем его для нахождения E_x в случае $r_0 = R$, когда точка M_0 находится на поверхности сферы. Тогда приходим к сходящемуся несобственному интегралу

$$\begin{aligned} I &= 2\pi R \int_{-R}^R \frac{(R - x) dx}{(2R^2 - 2Rx)^{3/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2R}} \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R - x}} = \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{2R}} \sqrt{R - x} \Big|_{-R}^R = 2\pi. \end{aligned}$$

Учитывая (6.35), находим $E_x = Q/(8\pi\epsilon_0 R^2)$. Таким образом, функция $E_x(r_0)$ при $r_0 = R$ имеет точку разрыва первого рода, причем значение $E_x(R)$ равно полусумме пределов функции $E(r_0)$ при $r_0 \rightarrow R - 0$ и $r_0 \rightarrow R + 0$.

6.6. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть Φ — кусочно гладкая ограниченная двусторонняя поверхность. Выберем одну из сторон поверхности Φ с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$ нормали к этой поверхности. Координатами вектора \mathbf{n} являются его направляющие косинусы $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, представляющие собой функции точки поверхности. Зададим на поверхности Φ три функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

Поверхностный интеграл первого рода вида

$$\int_{\Phi} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS \quad (6.36)$$

называют *поверхностным интегралом второго рода* от функций P , Q , R .

Поверхностный интеграл второго рода фактически представляет собой сумму трех отдельных интегралов, соответствующих трем подынтегральным функциям $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. Рассмотрим первый из этих интегралов. Входящее в него выражение $\cos \alpha dS$ можно рассматривать как проекцию элемента площади dS на координатную плоскость yOz . Это позволяет $\cos \alpha dS$ заменить элементом площади $dy dz$ на координатной плоскости yOz и записать интеграл в виде

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz.$$

Аналогичным образом можно обозначить две другие составляющие поверхностного интеграла, а весь поверхностный интеграл можно представить в виде

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy. \quad (6.37)$$

В ситуации, когда поверхностный интеграл вычисляется по замкнутой поверхности Φ , для него часто используют специальное обозначение \oiint . Таким образом, запись

$$\oiint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

означает, что поверхностный интеграл берется по замкнутой поверхности Φ .

Сформулируем свойства поверхностного интеграла второго рода на примере одного его слагаемого, соответствующего функции $R(x, y, z)$.

1°. При изменении стороны поверхности интеграл меняет знак.

2°. Интеграл от линейной комбинации m функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций:

$$\iint_{\Phi} \sum_{j=1}^m \alpha_j R_j(x, y, z) dx dy = \sum_{j=1}^m \alpha_j \iint_{\Phi} R_j(x, y, z) dx dy, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

3°. Если поверхность Φ разбита на конечное число N частей $\Phi_k \subset \Phi$, $k = \overline{1, N}$, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \sum_{k=1}^N \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy.$$

4°. Интеграл

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy$$

по любой цилиндрической поверхности Φ с образующими, параллельными оси Oz , равен нулю.

Интеграл (6.36) по выбранной стороне поверхности Φ является поверхностным интегралом первого рода от функции $P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$. Поэтому для его вычисления можно использовать формулы (6.26) или (6.28).

Предположим, что гладкая двусторонняя поверхность Φ без особых точек задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Пусть A, B, C — координаты вектора нормали $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ к поверхности, где векторы \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v вычислены по формулам (6.9).

Тогда, согласно равенствам (6.11) и (6.20), получаем

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Используя (6.26), находим

$$\int_{\Phi} P \cos \alpha dS = \iint_D P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A(u, v) du dv, \quad (6.38)$$

$$\int_{\Phi} Q \cos \beta dS = \iint_D Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B(u, v) du dv, \quad (6.39)$$

$$\int_{\Phi} R \cos \gamma dS = \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v) du dv. \quad (6.40)$$

Если гладкая поверхность Φ задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$, и выбрана ее верхняя сторона, т.е. единичный вектор \mathbf{n} нормали определен равенством (6.13), то

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$

Поэтому, используя представление (6.28), для верхней стороны поверхности получаем

$$\int_{\Phi} R \cos \gamma dS = \iint_{\Phi} R dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (6.41)$$

Для нижней стороны поверхности знак $\cos \gamma$ обратный, и поэтому в правой части (6.41) перед интегралом следует поставить

знак минус:

$$\int_{\Phi} R \cos \gamma dS = \iint_{\Phi} R dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (6.42)$$

Аналогично можно вычислить два остальных интеграла (6.36), если гладкая поверхность Φ задана уравнением $x = x(y, z)$, $(y; z) \in D_{yz}$, или $y = y(x, z)$, $(x; z) \in D_{xz}$.

Пример 6.7. Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Phi} z dx dy$$

по нижней стороне части Φ конуса, заданной уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. Проекцией этой части конуса на координатную плоскость xOy является замкнутый круг

$$D_{xy} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Используя (6.42) и переходя к полярным координатам, находим

$$\iint_{\Phi} z dx dy = - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = -\frac{2\pi}{3}.$$

Пример 6.8. Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Phi} y dz dx$$

по верхней стороне части Φ параболоида $z = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$ (рис. 6.6, а).

Разобьем поверхность Φ координатной плоскостью xOz на две части Φ_1 и Φ_2 , расположенные по разные стороны от этой плоскости. Поверхности Φ_1 и Φ_2 представляют собой графики

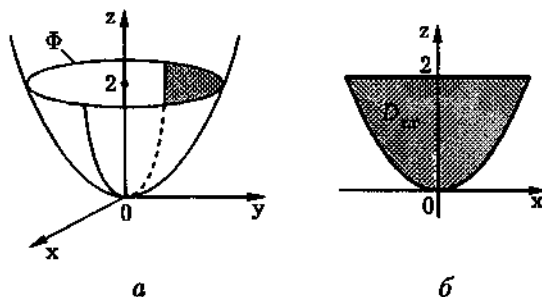


Рис. 6.6

функций $y = \sqrt{z - x^2}$ и $y = -\sqrt{z - x^2}$. Эти функции имеют общую область определения D_{zx} — проекцию поверхности Φ на плоскость xOz , которая описывается неравенствами $0 \leq z \leq 2$, $z \geq x^2$ (рис. 6.6, б). В соответствии со свойством 3° поверхностного интеграла второго рода запишем

$$\iint_{\Phi} y dz dx = \iint_{\Phi_1} y dz dx + \iint_{\Phi_2} y dz dx.$$

Выбор верхней стороны поверхности Φ означает выбор левой стороны Φ_1 и правой стороны Φ_2 . Для поверхности Φ_1 с выбранной стороной имеем

$$\iint_{\Phi_1} y dz dx = \iint_{D_{zx}} y dz dx,$$

где левая часть равенства — это поверхностный интеграл, а правая часть — двойной. Вычислим двойной интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{zx}} y dz dx &= - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 \sqrt{z - x^2} dz = \\ &= -\frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (z - x^2)^{3/2} \Big|_{x^2}^2 dx = -\frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} dx. \end{aligned}$$

Определенный интеграл от функции $(2-x^2)^{3/2}$ вычислим с помощью тригонометрической замены $x = \sqrt{2}\sin t$ (при этом $dx = \sqrt{2}\cos t dt$). В результате получим

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2} dx &= \\ &= -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4 t dt = -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)^2 dt = \\ &= -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt = -\pi. \end{aligned}$$

Для поверхности Φ_2 с выбранной стороной (правой) имеем

$$\iint_{\Phi_2} y dz dx = \iint_{D_{xz}} y dz dx = - \iint_{D_{xz}} \sqrt{z^2 - x^2} dz dx.$$

Вычисления аналогичны предыдущим и дают тот же результат $-\pi$. Таким образом,

$$\iint_{\Phi} y dz dx = -2\pi.$$

6.7. Физический смысл поверхностного интеграла второго рода

Рассмотрим задачу о нахождении количества жидкости, протекающей за единицу времени через заданную поверхность Φ (в этом случае говорят о расходе жидкости через Φ). Предположим, что плотность жидкости постоянна, поверхность пронизаема для жидкости и процесс течения жидкости установившийся, т.е. вектор \mathbf{v} ее скорости в каждой точке M пространства не изменяется во времени.

Если поверхность Φ площадью S является частью плоскости, а вектор \mathbf{v} перпендикулярен этой плоскости, то объемный

расход жидкости через Φ , т.е. ее объем, протекающий через Φ в единицу времени, равен $Q = |v|S$. Если же вектор v составляет угол φ с вектором нормали к этой плоскости, то $Q = |v|S \cos \varphi$. Ясно, что в зависимости от выбора направления вектора нормали к плоскости расход может быть положительным, отрицательным, а в частном случае и равным нулю.

Пусть теперь Φ — некоторая гладкая поверхность и в каждой точке $M(x; y; z) \in \Phi$ задан вектор скорости с помощью векторной функции $v(M) = v(x, y, z)$. Выберем разбиение поверхности Φ на n частичных областей Φ_i с площадями ΔS_i и диаметрами d_i , $i = \overline{1, n}$, и в каждой частичной области Φ_i рассмотрим произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Естественно считать, что при малых значениях диаметров d_i каждую частичную область Φ_i можно заменить его проекцией на касательную плоскость к поверхности Φ в точке M_i . Кроме того, предполагаем, что в пределах частичной области Φ_i вектор скорости жидкости можно считать постоянным и равным $v(M_i)$. При этих предположениях объемный расход жидкости через поверхность Φ_i в выбранном направлении единичного вектора $n(M_i)$ нормали к поверхности в точке M_i приближенно равен

$$Q_i \approx |v(M_i)| \cos \varphi_i \Delta S_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где φ_i — угол между векторами $v(M_i)$ и $n(M_i)$, а общий расход через всю поверхность Φ равен

$$Q \approx \sum_{i=1}^n |v(M_i)| \cos \varphi_i \Delta S_i.$$

Ясно, что точность последнего соотношения будет тем выше, чем мельче разбиение поверхности Φ на частичные области. По определению полагают

$$Q = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |v(M_i)| \cos \varphi_i \Delta S_i, \quad (6.43)$$

где $d = \max_{i=\overline{1, n}} d_i$.

Пусть $\cos \alpha(M_i)$, $\cos \beta(M_i)$, $\cos \gamma(M_i)$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}(M_i)$, так что

$$\mathbf{n}(M_i) = \cos \alpha(M_i)\mathbf{i} + \cos \beta(M_i)\mathbf{j} + \cos \gamma(M_i)\mathbf{k},$$

а $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ — координаты вектора $\mathbf{v}(M)$ скорости жидкости, т.е.

$$\mathbf{v}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}. \quad (6.44)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(M_i)| \cos \varphi_i = \mathbf{v}(M_i)\mathbf{n}(M_i) &= P(M_i) \cos \alpha(M_i) + \\ &+ Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i), \quad M_i \in \Phi_i. \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (6.43), согласно определениям *поверхностного интеграла первого рода* и *поверхностного интеграла второго рода*, приходим к следующему:

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(P(M_i) \cos \alpha(M_i) + \right. \\ &\quad \left. + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i) \right) \Delta S_i = \\ &= \int_{\Phi} \left(P(M) \cos \alpha(M) + Q(M) \cos \beta(M) + R(M) \cos \gamma(M) \right) dS. \end{aligned}$$

Поэтому для объемного расхода жидкости, протекающей через поверхность Φ и имеющей вектор скорости $\mathbf{v}(M)$ вида (6.44), можем записать

$$Q = \iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

Выбор *стороны поверхности* Φ , определяемой выбором единичного вектора нормали этой поверхности, влияет на знак объемного расхода жидкости.

6.8. Формула Стокса

Пусть гладкая двусторонняя поверхность Φ , ограниченная гладким контуром L , задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u; v) \in D,$$

с помощью функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной гладким контуром L^* .

Контур L^* при отображении, определяемом функциями $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, соответствует контур L , ограничивающий поверхность Φ . Обходу контура L^* на плоскости отвечает обход контура L , и наоборот. Условимся считать положительным такое направление обхода контура L , которому соответствует положительное направление обхода контура L^* . Если единичный вектор n нормали к поверхности определить формулой (6.12), то при положительном обходе контура L поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора n . Таким образом, положительное направление обхода границы поверхности согласуется с выбором ее стороны.

Как и ранее, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора n в произвольной точке M поверхности Φ .

Пусть в некоторой пространственной области G , целиком содержащей поверхность Φ , заданы непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Тогда имеет место *формула Стокса**

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_{\Phi} \left((Q'_x - P'_y) \cos \gamma + (P'_z - R'_x) \cos \beta + (R'_y - Q'_z) \cos \alpha \right) dS, \end{aligned} \quad (6.45)$$

* Дж. Г. Стокс (1819–1903) — английский физик и математик.

где обход контура L при выбранной стороне поверхности Φ происходит в положительном направлении.

Эту формулу, используя *поверхностный интеграл второго рода*, можно записать следующим образом:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz. \quad (6.46)$$

Докажем, что

$$\oint_L P dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (6.47)$$

Сначала преобразуем *криволинейный интеграл второго рода* по контуру L в левой части (6.47). Пусть контур L^* , ограничивающий область D , задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in T = [t_1, t_2],$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда параметрические уравнения, задающие контур L , примут вид

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \quad t \in T.$$

В соответствии с правилами вычисления криволинейного интеграла второго рода (см. 5.5) запишем

$$\oint_L P dx = \int_{t_1}^{t_2} P \left(\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \right) dt = \\ = \oint_{L^*} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right).$$

К интегралу в правой части этого равенства применим формулу Грина для односвязной области:

$$\begin{aligned} \oint_{L^*} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) du dv = \\ &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) du dv - \\ &\quad - \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) du dv. \end{aligned}$$

Так как смешанные производные функции $x(u, v)$ непрерывны, верно равенство $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ [V]. Поэтому после упрощений с учетом соотношений (6.11) и (6.38)–(6.40) получаем

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv - \\ &\quad - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) du dv = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \end{aligned}$$

что доказывает равенство (6.47).

Аналогично можно доказать, что

$$\oint_L Q dy = \iint_{\Phi} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz, \quad (6.48)$$

$$\oint_L R dz = \iint_{\Phi} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz. \quad (6.49)$$

Складывая (6.47)–(6.49), получаем формулу Стокса (6.46). Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L через общий поверхностный интеграл второго рода по поверхности Φ , ограниченной этим контуром (иногда говорят „опирающейся на контур L “).

Отметим, что если поверхность Φ является плоской областью и лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy , то формула Стокса переходит в формулу Грина (5.37).

Как и формула Грина, формула Стокса обобщается на случай, когда поверхность ограничена несколькими кусочно гладкими контурами. При этом в левой части равенства (6.45) появляется сумма криволинейных интегралов по граничным контурам, проходимым в положительном направлении, т.е. так, что при обходе каждого контура поверхность остается слева, если смотреть с конца выбранного вектора нормали к поверхности. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограниченных несколькими контурами, аналогично доказательству формулы Грина для многосвязных областей.

Пример 6.9. Вычислим двумя способами (непосредственным подсчетом криволинейного интеграла второго рода и по формуле Стокса) криволинейный интеграл

$$I = \oint_L y dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

где L — окружность, по которой плоскость $z = \sqrt{3}$ пересекает сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Подставляя в уравнение сферы значение $z = \sqrt{3}$, получаем $x^2 + y^2 = 1$, т.е. радиус окружности L равен единице.

Чтобы вычислить криволинейный интеграл непосредственно, составим параметрические уравнения окружности L :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \sqrt{3}, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Из параметрических уравнений находим $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ и $dz = 0$. Используя формулу (5.36) вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 3 \cos t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = -\pi.$$

Чтобы вычислить криволинейный интеграл с помощью формулы Стокса, положим $P = y$, $Q = z^2$, $R = x^2$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z.$$

Согласно (6.46), рассматриваемый криволинейный интеграл сводится к поверхностному интегралу

$$I = - \iint_{\Phi} dx dy + 2x dz dx + 2z dy dz, \quad (6.50)$$

где Φ — произвольная гладкая поверхность, ограниченная контуром L . Рассмотрим два варианта такой поверхности: верхний сегмент сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, на которой расположен контур L , и круг в плоскости $z = \sqrt{3}$, ограниченный контуром L .

Сначала вычислим поверхностный интеграл по верхнему сегменту сферы. Чтобы направление обхода контура L было положительным, на сегменте сферы следует выбрать верхнюю сторону. Проекциями сегмента сферы Φ на координатные плоскости будут области

$$D_{xy} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$D_{xz} = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{4-z^2} \leq x \leq \sqrt{4-z^2}, z \in [\sqrt{3}, 2]\},$$

$$D_{yz} = \{(y; z) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{4-z^2} \leq y \leq \sqrt{4-z^2}, z \in [\sqrt{3}, 2]\}.$$

На область D_{yz} проектируются две части поверхности, на которые она разделяется плоскостью yOz . Одна из этих частей описывается уравнением $x = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, и для нее $\cos \alpha \geq 0$, а другая — уравнением $x = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, и для нее $\cos \alpha \leq 0$. Поэтому для входящего в (6.50) *поверхностного интеграла второго рода* от функции $2z$ получаем

$$\iint_{\Phi} 2z \, dy \, dz = 2 \iint_{D_{yz}} z \, dy \, dz - 2 \iint_{D_{yz}} z \, dy \, dz = 0.$$

Аналогично для области D_{xz} имеем

$$\iint_{\Phi} 2x \, dz \, dx = 2 \iint_{D_{xz}} x \, dz \, dx - 2 \iint_{D_{xz}} x \, dz \, dx = 0.$$

Учитывая, что $\cos \gamma > 0$ для выбранной стороны сегмента сферы, находим

$$\iint_{\Phi} dx \, dy = \iint_{D_{xy}} dx \, dy = \pi,$$

поскольку область D_{xy} есть круг радиуса 1 с площадью π . Подставляя полученные результаты в (6.50), приходим к полученному ранее результату $I = -\pi$.

Теперь вычислим *поверхностный интеграл* (6.50) по верхней стороне круга $x^2 + y^2 \leq 1$ в плоскости $z = \sqrt{3}$. В этом случае $dz = 0$, и поэтому получаем

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{\Phi} dx \, dy + 2x \, dz \, dx + 2z \, dy \, dz = \\ &= - \iint_{\Phi} dx \, dy = - \iint_{D_{xy}} dx \, dy = -\pi. \end{aligned}$$

Итак, все три способа вычисления рассматриваемого *криволинейного интеграла* дали одинаковый результат.

6.9. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве

Для криволинейных интегралов второго рода общего вида вдоль пространственной кривой AB можно сформулировать условия независимости их от пути интегрирования, аналогичные тем, которые были установлены в теореме 5.6.

Пространственную область G назовем *поверхностно односвязной*, если любой контур L , целиком лежащий в G , является границей некоторой поверхности, лежащей в G . Примером поверхностно односвязной области является шар. Поверхностно односвязной областью является также полый шар, т.е. область, заключенная между двумя концентрическими сферами. К поверхностно односвязным не относится область внутри тора — поверхности, образованной вращением окружности вокруг оси, которая расположена в плоскости окружности и с окружностью не пересекается.

Теорема 6.3. Пусть G — поверхностно односвязная область в пространстве и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в G . Тогда следующие четыре условия эквивалентны.

1. Выражение $P dx + Q dy + R dz$ является полным дифференциалом dF некоторой функции $F(x, y, z)$, дифференцируемой в G .

2. В области G верны равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \end{cases} \quad (6.51)$$

3. Для любого кусочно гладкого контура L , целиком лежащего в области G , справедливо равенство

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0. \quad (6.52)$$

4. Для любых двух точек A и B в области G криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

не зависит в этой области от пути интегрирования. #

Доказательство этой теоремы можно провести „в круговую“ аналогично доказательству теоремы 5.6 с той лишь разницей, что надо опереться на *формулу Стокса*, а не на *формулу Грина*, которая по сути является частным случаем формулы Стокса. Отметим, что если криволинейный интеграл в пространстве не зависит от пути интегрирования, то, как и в плоском случае, в его обозначении указывают лишь начальную и конечную точки кривой. При этом для любой кусочно гладкой кривой AB с *начальной точкой* $A(x_A; y_A; z_A)$ и *конечной точкой* $B(x_B; y_B; z_B)$, целиком лежащей в G , имеет место *формула Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла* вдоль пространственной кривой

$$\begin{aligned} & \int_{(x_A; y_A; z_A)}^{(x_B; y_B; z_B)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = F(x_B, y_B, z_B) - F(x_A, y_A, z_A) = F(x, y, z) \Big|_{(x_A; y_A; z_A)}^{(x_B; y_B; z_B)}, \quad (6.53) \end{aligned}$$

где $F(x, y, z)$ — произвольная функция, имеющая дифференциал $dF = P dx + Q dy + R dz$. Такую функцию можно найти, как и в случае плоской области, интегрированием по отрезкам прямых, параллельных координатным осям. Например, можно

использовать формулу

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} P dx + Q dy + R dz = \\
 &= C + \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz, \quad (6.54)
 \end{aligned}$$

где $C = \text{const}$, а $(x_0; y_0; z_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка области G . Приведенная формула соответствует интегрированию вдоль трехзвенной ломаной, первое звено которой параллельно оси Ox , второе — оси Oy , а третье — оси Oz . Применение формулы возможно в том случае, когда эта ломаная целиком попадает в область G .

6.10. Формула Остроградского — Гаусса

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным и поверхностным интегралами. Аналогичная связь существует между поверхностным интегралом и *тройным интегралом*. Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, введем одно понятие.

Пространственную область G назовем *объемно односвязной*, если для любой замкнутой поверхности, лежащей в G , ограничиваемая этой поверхностью область также целиком лежит в G . Объемно односвязными областями являются шар и внутренность тора (часто также называемая тором), в то время как полый шар (область между двумя концентрическими сферами) к объемно односвязным областям не относится.

Предположим, что замкнутая пространственная область G может быть разделена на конечное число областей, правильных в направлении оси Ox . Пусть аналогичное свойство выполняется и в отношении двух других осей Oy и Oz . Такую область мы будем называть *простой*.

Теорема 6.4. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в объемно односвязной области G , то для любой простой замкнутой области $V \subset G$, ограниченной кусочно гладкой замкнутой поверхностью Φ , верна *формула Остроградского — Гаусса**

$$\begin{aligned} \oiint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (6.55) \end{aligned}$$

где *поверхностный интеграл второго рода* вычисляется по внешней стороне поверхности Φ .

◀ Формула Остроградского — Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям P , Q и R . Эти три равенства доказываются схожим образом, и мы остановимся на одном из них, например на равенстве

$$\oiint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz. \quad (6.56)$$

Рассматриваемое равенство обладает свойством аддитивности. Это означает, что если замкнутая область V разбита на *частичные области* V_k , $k = \overline{1, m}$, ограниченные кусочно гладкими поверхностями Φ_k , и для этих замкнутых областей доказываемое равенство установлено, то это равенство будет выполняться и для самой области V . Действительно, пусть

$$\oiint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy = \iiint_{V_k} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz, \quad k = \overline{1, m}.$$

*В отечественной литературе эту формулу часто называют формулой Остроградского, который вывел ее в 1828 г. и опубликовал в 1831 г., а в 1834 г. обобщил на случай n -мерной области. К. Гаусс получил частный вариант этой формулы в 1813 г.

Просуммировав эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy &= \sum_{k=1}^m \iiint_{V_k} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности Φ , так как по частям границ Φ_k частичных областей V_k , не входящим в поверхность Φ , интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Так как замкнутая область V является простой, ее можно разбить на частичные области V_k , $k = \overline{1, m}$, являющиеся правильными в направлении оси Oz . Таким образом, равенство (6.56) достаточно доказать для случая замкнутой области, правильной в направлении оси Oz .

Итак, пусть замкнутая область $V \subset G$ является правильной в направлении оси Oz . Это значит, что она ограничена двумя поверхностями Φ_1 и Φ_2 вида $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$, где функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены в замкнутой области D_{xy} на плоскости и удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, а также цилиндрической поверхностью Φ_3 с образующими, параллельными оси Oz . По правилу вычисления *тройного интеграла* по правильной области V имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Полученные двойные интегралы по области D_{xy} можно заменить равными им поверхностными интегралами второго рода по поверхностям Φ_2 и Φ_1 , причем для учета знаков двойных интегралов для поверхности Φ_2 нужно выбрать верхнюю сторону, а для поверхности Φ_1 — нижнюю. К этим интегралам добавим равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой поверхности Φ_3 (цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz). В итоге получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Phi_2} R dx dy + \iint_{\Phi_1} R dx dy + \\ &+ \iint_{\Phi_3} R dx dy = \oiint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

что равносильно (6.56). ►

Формулу Остроградского — Гаусса можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \oiint_{\Phi} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS &= \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (6.57) \end{aligned}$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности Φ .

Замечание 6.1. Формулу Остроградского — Гаусса можно распространить на произвольную ограниченную пространственную область V , граница Φ которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно гладких поверхностей (область V в этом случае имеет полости). При этом в левой части формулы Остроградского — Гаусса поверхностный интеграл следует брать вдоль границы области V , т.е. необходимо суммировать

поверхностные интегралы по всем поверхностям, составляющим границу, причем для внешней поверхности выбирается внешняя сторона, а для внутренних — внутренняя. Чтобы доказать такое обобщение формулы Остроградского — Гаусса, достаточно соединить произвольными гладкими поверхностями внешнюю часть границы области V с внутренними. #

Формула Остроградского — Гаусса используется во многих приложениях. Одно из ее возможных применений — вычисление интегралов по замкнутым поверхностям сведением их к тройному интегралу или, наоборот, вычисление тройных интегралов с помощью поверхностных (аналогично тому, как площадь плоской области может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла). Правая часть формулы (6.55) Остроградского — Гаусса равна объему замкнутой области V , если функции P , Q , R удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1. \quad (6.58)$$

Например, объем области V , который обозначим также через V , можно найти при помощи поверхностного интеграла

$$V = \frac{1}{3} \oint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy, \quad (6.59)$$

вычисляемого по внешней стороне замкнутой поверхности Φ , ограничивающей эту область. Нетрудно выписать целый ряд аналогичных формул, используя различные подходящие комбинации функций P , Q , R .

Следствие 6.1. Пусть G — объемно односвязная область в \mathbb{R}^3 и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в этой области. Для того чтобы поверхностный интеграл от функций P , Q , R по любой замкнутой поверхности $\Phi \subset G$ равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы выпол-

нялось равенство

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} = 0, \quad (x; y; z) \in G. \quad (6.60)$$

◀ Достаточность следует непосредственно из формулы Остроградского — Гаусса, а необходимость докажем от противного. Пусть поверхностный интеграл от функций P, Q, R по любой замкнутой поверхности равен нулю, в то время как в некоторой точке $M_*(x_*, y_*, z_*) \in G$ равенство (6.60) не выполняется. Для определенности предположим, что

$$\frac{\partial P(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} + \frac{\partial R(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} > 0.$$

В силу непрерывности этих частных производных такое неравенство выполнено и в некоторой окрестности $U(M_*) \subset V$ точки M_* . Но тогда

$$\iiint_{U(M_*)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz > 0,$$

а в соответствии с формулой Остроградского — Гаусса поверхностный интеграл по внешней стороне замкнутой поверхности, ограничивающей эту окрестность, является положительным, что противоречит исходному предположению. ▶

Пример 6.10. С помощью формулы Остроградского — Гаусса вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$I = \oiint_{\Phi} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$

по внешней стороне Φ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

В соответствии с (6.57) имеем

$$I = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz,$$

где V — замкнутый шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, & \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

С учетом равенства $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R (\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta) r^3 \sin \theta dr = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} ((\cos \varphi + \sin \varphi) \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = 0,$$

то второе слагаемое в подынтегральной функции двойного интеграла можно опустить. В результате находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) \sin^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Вопросы и задачи

6.1. Пользуясь явным заданием поверхности, вычислить площади:

а) части гиперболического параболоида $az = xy$, ограниченной цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$;

б) части эллиптического параболоида $2az = x^2 + y^2$, ограниченной цилиндрической поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

в) части конической поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

г) части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 2x$.

6.2. Пользуясь параметрическим заданием поверхности, вычислить площади:

а) части геликоида $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h\varphi$, $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$;

б) поверхности тора $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi$, $y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi$, $z = a \sin \psi$ при $0 \leq a \leq b$ и $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$.

6.3. Вычислить площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = z^2/3$, $x = 0$, $x + y + z = 2a$, $a > 0$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x + 2z = a$, $a > 0$.

6.4. Вычислить поверхностные интегралы первого рода по заданной поверхности Φ от заданной функции:

а) $f(y, z) = \sqrt{y^2 - z^2}$, Φ — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$;

б) $f(x, y, z) = x + y + z$, Φ — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$;

в) $f(x, y) = x^2 + y^2$, Φ — граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$;

г) $f(z) = z$, Φ — часть геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$ при $u \in [0, a]$ и $v \in [0, 2\pi]$;

д) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, Φ — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

6.5. При заданной поверхностной плотности $\rho_S(M) = \rho_0 z/a$ в точках M поверхности вычислить массу:

- а) части поверхности $z = (x^2 + y^2)/2$ при $z \leq a$;
 б) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $z \geq 0$.

6.6. Вычислить статические моменты относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки $x + y + z = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ с поверхностной плотностью $\rho_0 = \text{const}$.

6.7. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной (с поверхностной плотностью $\rho_0 = \text{const}$) конической поверхности $x^2 + z^2 = y^2$, $y > 0$, ограниченной цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$.

6.8. С какой силой однородная (с поверхностной плотностью $\rho_0 = \text{const}$) поверхность $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r$ при $0 \leq a \leq r \leq b$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ притягивает материальную точку массой m , находящуюся в начале координат?

6.9. Вычислить общие поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint_{\Phi} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, где Φ — внешняя сторона

сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\iint_{\Phi} (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy$, где Φ —

нижняя сторона части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $z \in [0, h]$;

в) $\iint_{\Phi} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где Φ — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

6.10. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint_L y dx + z dy + x dz$, где L — окружность, полученная пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ плоскостью $x + y + z = 0$ и обходимая против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1; 0; 0)$;

б) $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, где L — граница сечения куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ плоскостью $x + y + z = 3a/2$, которая обходится против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a; 0; 0)$.

6.11. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции, и вычислить криволинейные интегралы:

$$\text{а) } \int_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)} x dx + y^2 dy - z^2 dz; \quad \text{б) } \int_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

6.12. Вычислить работу силы F вдоль контура L , обходимого против часовой стрелки, если смотреть из точки M :

а) $F = xi + yj + zk$, L — окружность, по которой плоскость $x = 2y$ пересекает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $M(2R; 0; 0)$;

б) $F = yzi + xzj + xyk$, L — эллипс, по которому плоскость $2z - 3x = 6$ пересекает цилиндрическую поверхность $x^2 + y^2 = 1$, $M(2; 0; 0)$.

6.13. Пользуясь формулой Остроградского — Гаусса, вычислить поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности Φ :

а) $\iint_{\Phi} yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$, где Φ — граница тела

$$x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h \quad (h > 0);$$

б) $\iint_{\Phi} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$, где Φ — поверхность куба

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a \quad (a > 0);$$

в) $\iint_{\Phi} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, где Φ — часть поверхности

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ заключенная между плоскостями } z = 0 \text{ и } z = 1.$$

6.14. Вывести формулу (6.20), в которой E, F, G определяются соотношениями (6.17)–(6.19).

6.15. По аналогии с (6.54) записать формулу для нахождения функции $F(x, y, z)$ путем интегрирования сначала вдоль прямой, параллельной оси Oz , затем вдоль прямой, параллельной оси Oy , и, наконец, вдоль прямой, параллельной оси Ox .

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Если на некотором множестве D в пространстве (области, кривой, поверхности) задано отображение, которое каждой точке множества ставит в соответствие значение какой-либо величины, то такое отображение называют *полем*. В случае скалярной величины говорят о *скалярном поле*, а в случае векторной величины — о *векторном поле*. Существуют поля и других типов, но они здесь не рассматриваются.

Скалярные и векторные поля — это функции точки и потому не связаны с какой-либо системой координат. Зафиксировав прямоугольную систему координат, мы можем представлять точки пространства упорядоченными тройками их координат, а скалярные и векторные поля — функциями многих переменных. Такое представление позволяет при изучении полей использовать аппарат дифференциального исчисления. В то же время не следует ставить знак равенства между терминами „поле“ (скалярное или векторное) и „функция многих переменных“. Понятие поля позволяет наиболее естественно характеризовать и описывать те свойства реальных объектов, которые не зависят от выбора системы координат: реальные физические свойства и не должны быть связаны с какой-либо системой координат.

7.1. Скалярное поле

Как уже было сказано, *скалярное поле*, заданное на множестве D , — это отображение с областью определения D , значениями которого являются действительные числа (значения скалярной величины). В качестве множества D , как правило, рассматривают некоторую пространственную область, поверхность или кривую.

Пример 7.1. Пусть пространственная кубуруемая замкнутая область D заполнена веществом. Выберем в D точку M и произвольную кубуруемую замкнутую область $D_M \subset D$, содержащую точку M . Обозначим через $V(D_M)$ и $d(D_M)$ объем и диаметр D_M . Если $m(D_M)$ — масса содержащегося в D_M вещества, то отношение $\frac{m(D_M)}{V(D_M)}$ представляет собой среднюю объемную плотность вещества в D_M . Предположим, что в каждой точке $M \in D$ существует конечный предел

$$\lim_{d(D_M) \rightarrow 0} \frac{m(D_M)}{V(D_M)} = \rho(M). \quad (7.1)$$

Тогда в D определено скалярное поле, значением которого в точке M является объемная плотность $\rho(M)$ массы вещества (такое поле обычно называют полем плотности вещества).

Объемная плотность $\rho(M)$ может изменяться от точки к точке, т.е. вещество в замкнутой области D может быть распределено неравномерно. Если скалярное поле во всех точках D принимает одно и то же значение, то говорят об *однородном поле*, а если скалярное поле меняется от точки к точке, то говорят о *неоднородном поле*. В рассматриваемом примере неравномерное распределение вещества описывается неоднородным полем плотности вещества. Если же $\rho(M) = \text{const}$, т.е. вещество тела распределено по объему равномерно, то мы имеем дело с однородным полем плотности вещества. #

На практике встречаются ситуации, когда скалярная величина зависит не только от точки пространства, но и от времени. Примером такого рода является распределение температуры в нагретом теле, остывающем благодаря происходящему на его поверхности теплообмену с окружающей средой. Температура в каждой точке тела изменяется с течением времени до тех пор, пока не достигнет значения температуры окружающей среды. В этих случаях говорят, что скалярное поле зависит от времени и называют его *нестационарным скалярным*

полем. Если же скалярное поле от времени не зависит, то его называют *стационарным*. Мы не будем рассматривать нестационарный случай и далее под скалярным полем будем понимать стационарное скалярное поле.

Пусть на множестве D в пространстве задано скалярное поле $u(M)$. Введем некоторую прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O . Тогда каждая точка $M \in D$ будет определяться тройкой своих координат x_1, x_2, x_3 , а скалярное поле будет представлено скалярной функцией трех переменных $u(x_1, x_2, x_3)$. Это позволяет исследовать скалярное поле с использованием теории функций многих переменных. Разумеется, вид функции трех переменных, соответствующей скалярному полю, зависит от выбранной системы координат, в то время как само скалярное поле с выбором системы координат никак не связано.

При фиксированной точке O в пространстве любую точку можно определить ее радиус-вектором. В этом случае скалярное поле $u(M)$ можно рассматривать как скалярную функцию $u(\mathbf{r})$ векторного аргумента $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.

Изучение скалярного поля существенно упрощается, если оно обладает какими-либо свойствами симметрии. Если в некоторой системе координат скалярное поле зависит лишь от двух координат, то такое поле называют *плоским* (или *двумерным* в отличие от *трехмерного поля*, которое в любой системе координат зависит от всех трех координат). Плоским является температурное поле грунта вокруг равномерно нагретой длинной прямолинейной горизонтальной круглой трубы теплотрассы. В этом случае в любой плоскости, перпендикулярной оси трубы, будет одно и то же распределение температуры. Плоское скалярное поле удобно рассматривать при фиксированном значении координаты, от которой это поле не зависит, т.е. как функцию точки на плоскости, а не в пространстве. Примером такого рода может служить поле температур тонкой металлической пластинки, толщиной которой можно пренебречь.

Такой трактовкой плоских скалярных полей мы будем пользоваться в дальнейшем.

Скалярное поле называют *одномерным*, если в некоторой прямоугольной системе координат оно зависит лишь от одной координаты. Температурное поле в неподвижной воде, находящейся у поверхности покрытого льдом водоема, является одномерным, поскольку в некотором приближении можно считать, что в этом случае температура воды зависит только от расстояния от этой поверхности.

Скалярное поле можно рассматривать не только в прямоугольной, но и в цилиндрической системе координат. Если скалярное поле в некоторой цилиндрической системе координат $O\varphi z$ не зависит от угловой координаты φ , то такое поле называют *осесимметричным*. Упомянутое выше плоское температурное поле грунта будет к тому же и осесимметричным в некоторой области, охватывающей круглую трубу, если труба уложена горизонтально на значительной глубине и можно пренебречь влиянием теплообмена на поверхности грунта. Плоское осесимметричное *скалярное поле*, зависящее лишь от радиальной координаты r , называют *осевым*. Примером осесимметричного скалярного поля является распределение давления воды в водоносном пласте вблизи вертикальной скважины с круглым поперечным сечением, ось которой совпадает с координатной осью Oz . Строго говоря, оно не является осевым, поскольку давление воды зависит не только от радиальной координаты, но и от глубины, определяемой координатой z .

Если в некоторой сферической системе координат $O\varphi\vartheta$ скалярное поле зависит лишь от расстояния r (расстояния от точки M до фиксированной точки O), то его называют *центральной скалярным полем* с центром в точке O . Примером центрального скалярного поля является гравитационный потенциал (от латинского слова *potentia* — сила) материальной точки M_0 массой m_0 , который, как известно из курса физики, изменяется обратно пропорционально расстоянию r от этой

точки и может быть записан в виде

$$u(r) = G \frac{m_0}{r}, \quad (7.2)$$

где G — гравитационная постоянная (постоянная тяготения), в соответствии с современными измерениями равная $6,672 \times 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Аналогично скалярное поле U электростатического потенциала, создаваемое точечным зарядом q_0 , помещенным в точку M_0 , является центральным и может быть представлено в виде

$$U(r) = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (7.3)$$

где $\epsilon_0 \approx 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}}$ — электрическая постоянная.

Для исследования скалярного поля, как и скалярной функции трех переменных, удобно использовать поверхности уровня $[V]$. Поверхностью уровня скалярного поля называют множество точек M из области определения D скалярного поля, в которых оно имеет заданное значение C . Очевидно, что через каждую точку $M \in D$ проходит ровно одна поверхность уровня. Обратим внимание на то, что поверхность уровня, вообще говоря, может и не быть поверхностью. Например, нетрудно определить скалярное поле, одной из поверхностей уровня которого является прямая. В конкретных прикладных задачах для поверхностей уровня скалярного поля часто используют специальные термины: поверхности уровня температурного поля называют изотермами, поля давления — изобарами, поля гравитационного или электростатического потенциала — эквипотенциальными поверхностями и т.п.

Рассмотрим, например, поле электростатического потенциала, создаваемого точечным зарядом, помещенным в точку M_0 . Это поле описывается функцией (7.3), вид которой позволяет заключить, что эквипотенциальными поверхностями скалярного поля являются концентрические сферы с общим центром в точке M_0 . На рис. 7.1 штриховыми линиями изображены изо-

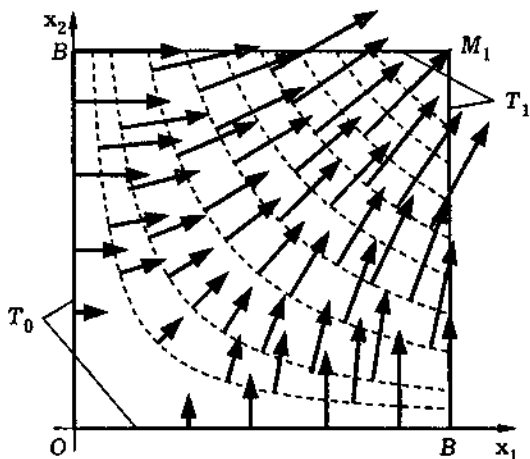


Рис. 7.1

термы плоского температурного поля $T(M)$, заданного функцией

$$T(x_1, x_2) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{B^2} x_1 x_2, \quad x_1, x_2 \in [0, B]. \quad (7.4)$$

На этом рисунке стрелки обозначают направление потока теплоты. Отметим, что изотермой со значением температуры T_0 является двузвенная ломаная, составленная из отрезков координатных осей Ox_1 и Ox_2 , а изотерма со значением температуры T_1 вырождается в точку M_1 с координатами $x_1 = x_2 = B$. Остальные изотермы являются дугами равнобочных гипербол $x_1 x_2 = \text{const}$.

7.2. Градиент скалярного поля

Если скалярное поле в пространственной области D в некоторой прямоугольной системе координат представлено непрерывной (дифференцируемой) в D функцией трех переменных, то такое поле мы будем называть *непрерывным (дифференцируемым)* в D . Отметим, что непрерывное (дифференцируе-

мое) скалярное поле в любой прямоугольной системе координат представляется непрерывной (дифференцируемой) функцией трех переменных.

Рассматривая скалярное поле $u(M)$ в заданной системе координат как скалярную функцию трех переменных, можно ввести понятия *производной скалярного поля по направлению* и *градиента скалярного поля*.

Напомним, что если функция $f(x_1, x_2, x_3)$ дифференцируема в точке $(x_1; x_2; x_3)$, то ее градиент $\text{grad } f(x_1, x_2, x_3)$ в этой точке может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = & \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} e_1 + \\ & + \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} e_3, \end{aligned}$$

где e_1, e_2, e_3 — базисные векторы прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, а производная этой функции по направлению вектора n в той же точке — по формуле

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial n} = n \text{ grad } f(x_1, x_2, x_3).$$

Производная скалярного поля в точке M по заданному направлению характеризует скорость роста значений скалярного поля в заданном направлении. Ясно, что эта характеристика не связана с выбором системы координат и отражает свойства самого скалярного поля. Точно так же градиент функции трех переменных, в заданной системе координат представляющей рассматриваемое скалярное поле, есть вектор, указывающий направление наибольшего роста значений скалярного поля и величину этого роста. Этот вектор, вычисляемый в какой-либо системе координат, от выбора этой системы координат не зависит и характеризует свойства скалярного поля. Его и называют градиентом скалярного поля в заданной точке и обозначают $\text{grad } u(M)$.

Своим появлением понятие градиента обязано шотландскому физику и математику Дж.К. Максвеллу (1831–1879) и происходит от латинского слова *gradior*, означающее „расти“ (отсюда и обозначение *grad*, введенное им в 1873 г.). Однако сначала Максвелл намеревался обозначить это понятие словом *slope* — „склон“, поскольку направление градиента противоположно направлению наискорейшего спуска по поверхности, которой можно изобразить плоское скалярное поле.

Если функция многих переменных $u(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0; z_0)$, то вектор градиента этой функции в точке $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через эту точку. В силу того, что понятия „поверхность уровня“ и „градиент“ не связаны с выбором системы координат, отмеченное свойство переносится и на скалярные поля. Отсюда, в частности, следует, что единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u(M)$ в точке M можно представить в виде [V]

$$n(M) = \pm \frac{\text{grad } u(M)}{|\text{grad } u(M)|}, \quad (7.5)$$

причем знак плюс соответствует направлению возрастания скалярного поля.

Скалярные поля с общей областью определения можно складывать и умножать на действительные числа. В результате этих операций мы снова получаем скалярные поля. Пусть в области D заданы дифференцируемые скалярные поля $u(M)$ и $v(M)$. Используя свойства частных производных скалярных функций, несложно установить, что

$$\text{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \text{grad } u + \beta \text{grad } v, \quad (7.6)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Это равенство отражает свойство линейности операции взятия градиента скалярного поля в заданной точке.

Аналогичным образом, учитывая правило дифференцирования произведения скалярных функций, можно установить пра-

вило вычисления градиента от произведения скалярных полей:

$$\text{grad}(uv) = u \text{grad} v + v \text{grad} u. \quad (7.7)$$

Пример 7.2. Вычислим градиент *плоского скалярного поля* $T(M)$, которое задано функцией $T(x_1, x_2)$ вида (7.4), определенной в области $D = \{(x_1; x_2): x_1 \in (0, B), x_2 \in (0, B)\}$.

Функция $T(x_1, x_2)$ дифференцируема в D , и поэтому для нее градиент определен в каждой точке области. Используя вид функции $T(x_1, x_2)$, находим, что проекции градиента скалярного поля на координатные оси Ox_1 и Ox_2 равны соответственно

$$\frac{\partial T(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{T_1 - T_0}{B^2} x_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{T_1 - T_0}{B^2} x_1.$$

Таким образом,

$$\text{grad} T(M) = \frac{T_1 - T_0}{B^2} (x_2 e_1 + x_1 e_2), \quad M \in D, \quad (7.8)$$

где e_1, e_2 — базисные векторы заданной прямоугольной системы координат. На рис. 7.1 изображены векторы градиента. Видно, что их длина по мере приближения к точке M_1 возрастает. В начале координат градиент скалярного поля нулевой. #

7.3. Векторное поле

Наиболее наглядным примером *векторного поля* является поле скоростей при течении жидкости. Пусть в некоторой области D пространства происходит движение частиц жидкости, при котором в каждой точке $M \in D$ частицы жидкости, попадающие в эту точку в различные моменты времени, имеют один и тот же вектор скорости $v(M)$. В этом случае говорят, что течение жидкости является установившимся (или стационарным). Таким образом, при установившемся течении жидкости вектор $v(M)$ в произвольной точке $M \in D$ не изменяется с течением времени, хотя в разных точках M_1 и M_2 векторы $v(M_1)$ и

$v(M_2)$ могут различаться. Тем самым в области D определено векторное поле — поле скоростей жидкости.

Если в пространстве задана прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$, векторное поле может быть представлено как векторная функция трех переменных. Действительно, в этом случае с помощью координат можно определить и точку в области определения, и вектор поля в этой точке. Обозначим через e_1, e_2, e_3 базисные векторы системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда векторное поле $a(M)$ с областью определения D можно представить в виде

$$a(M) = a_1(x_1, x_2, x_3)e_1 + a_2(x_1, x_2, x_3)e_2 + a_3(x_1, x_2, x_3)e_3, \quad (7.9)$$

где $a_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, — некоторые скалярные функции трех переменных, определенные в D . Значениями этих функций в точке $M(x_1; x_2; x_3)$ являются координаты вектора $a(M)$ в базисе e_1, e_2, e_3 . Мы их будем называть координатными функциями векторного поля $a(M)$.

Каждую из координатных функций можно рассматривать как представление некоторого скалярного поля. В этом смысле векторное поле можно считать комбинацией трех скалярных полей. Однако связь „векторное поле — три скалярных поля“ напрямую зависит от выбора системы координат.

Как и скалярные поля, **векторные поля** могут быть **стационарными** и **нестационарными**. В первом случае вектор поля зависит не только от точки, но и от времени, во втором — только от точки. Можно также выделить **однородные** и **неоднородные векторные поля**. Значением однородного векторного поля во всех точках области является один и тот же вектор, неоднородное векторное поле в разных точках принимает разные значения. В дальнейшем под векторным полем будем понимать стационарное векторное поле.

Векторное поле называют **двумерным (одномерным)**, если в некоторой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ оно не зависит от переменного x_3 (переменных x_2 и x_3). Одно-

мерное векторное поле естественно рассматривать как частный случай двумерного векторного поля. *Поле*, не являющееся двумерным (а значит, и одномерным), будем называть *трехмерным*. Двумерное *векторное поле* $v(M)$ называют *плоским*, если в той системе координат, в которой оно не зависит от третьей координаты x_3 , каждый вектор $v(M)$ параллелен плоскости x_1Ox_2 , т.е. в этой системе координат $a_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$. Плоские векторные поля удобно рассматривать на плоскости, т.е. как функции точки на плоскости, а не в пространстве. Двумерное *векторное поле*, не являющееся плоским, называют *плоскопараллельным*.

Пример 7.3. Твердое тело, вращающееся вокруг оси с постоянной угловой скоростью, описывает некоторую осесимметричную замкнутую область D (рис. 7.2). В точке $M \in D$ частицы (точки) твердого тела имеют скорость $v(M) = \Omega \times r$, где Ω — вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения, а r — радиус-вектор точки M , имеющий начало в некоторой фиксированной точке O на оси вращения. Отметим, что выбор точки O на оси вращения не является существенным [III].

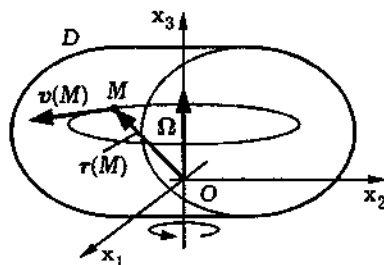


Рис. 7.2

Таким образом, в D определено векторное поле $v(M)$, которое представлено векторной функцией $v(r) = \Omega \times r$ векторного аргумента r .

Выберем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ось вращения совпала с координатной осью Ox_3 , а вектор

Ω и орт e_3 были сонаправленными (см. рис. 7.2). Тогда $\Omega = \Omega e_3$, где $\Omega = |\Omega|$ — длина вектора угловой скорости. Так как в выбранной системе координат радиус-вектор $r = \overrightarrow{OM}$ точки $M(x_1; x_2; x_3)$ имеет координаты x_1, x_2, x_3 , то векторное произведение $\Omega \times r$ может быть вычислено следующим образом:

$$\Omega \times r = \Omega e_3 \times (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = \Omega(x_1 e_2 - x_2 e_1).$$

Следовательно, векторное поле $v(M)$ представляется функцией

$$v(x_1, x_2) = \Omega \times r = \Omega(x_1 e_2 - x_2 e_1), \quad (7.10)$$

а координатные функции векторного поля имеют вид

$$v_1(x_1, x_2, x_3) = -\Omega x_2, \quad v_2(x_1, x_2, x_3) = \Omega x_1, \quad v_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемое векторное поле плоское, поскольку третья координатная функция равна нулю, а первые две не зависят от x_3 . Впрочем, это ясно и из геометрических соображений: векторы точек вращающегося тела перпендикулярны оси вращения и не меняются при переходе от точки к точке вдоль прямой, параллельной оси вращения.

Предположим, что твердое тело, вращаясь вокруг оси, к тому же еще перемещается поступательно с постоянной скоростью $v_0 = v_0 e_3$, направленной по оси вращения. Тогда векторная функция, представляющая поле в выбранной системе координат, изменится следующим образом:

$$\tilde{v}(x_1, x_2) = \Omega(x_1(M)e_2 - x_2(M)e_1) + v_0 e_3.$$

В этом случае векторное поле скоростей уже не будет плоским, хотя оно останется двумерным, т.е. оно плоскопараллельное. #

Если векторное поле $a(M)$ в некоторой цилиндрической системе координат $O\varphi z$ не зависит от угловой координаты φ ,

причем в каждой точке M вектор $\mathbf{a}(M)$ параллелен плоскости, проходящей через точку M и ось Oz , то это поле называют *осесимметричным*. Осесимметричное плоское векторное поле, векторы которого во всех точках M параллельны плоскости, перпендикулярной оси Oz , называют *осевым*. В осевом поле вектор в любой точке круговой цилиндрической поверхности $r = C = \text{const}$ перпендикулярен этой поверхности и имеет на поверхности постоянную длину. В связи с этим осевое векторное поле иногда называют цилиндрическим.

Пример 7.4. Рассмотрим однородный стержень, имеющий форму цилиндра высотой H с круговым поперечным сечением радиуса R и плоскими торцами (рис. 7.3). Пусть в материале стержня действуют внутренние источники тепловыделения с постоянной объемной мощностью q_V , торцы стержня идеально теплоизолированы, а его боковая поверхность охлаждается за счет теплообмена с окружающей средой. При установившемся распределении температуры в стержне количество теплоты выделившейся в стержне за единицу времени, пропорционально его объему $\pi R^2 H$ и равно $\pi q_V R^2 H$. Вся выделившаяся теплота будет проходить через боковую поверхность, поэтому плотность теплового потока на единицу площади этой поверхности в силу осевой симметрии стержня всюду одинакова и равна $q_V R/2$.

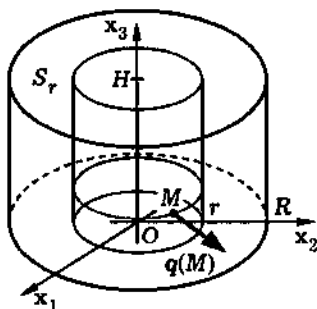


Рис. 7.3

Рассуждая аналогично, можно установить, что на любой цилиндрической поверхности S_r радиуса $r < R$, соосной с боковой поверхностью (см. рис. 7.3), плотность теплового потока равна $qvr/2$. Вектор $\mathbf{q}(M)$ плотности теплового потока, проходящего через поверхность S_r , в любой точке $M \in S_r$ в силу осевой симметрии стержня перпендикулярен поверхности S_r и имеет на поверхности постоянную длину $|\mathbf{q}(M)| = qvr/2$. Таким образом, перенос теплоты в стержне описывается векторным полем $\mathbf{q}(M)$, являющимся осевым.

Если один или оба торца стержня охлаждаются окружающей средой, то направление теплового потока уже не будет перпендикулярно оси стержня, а векторное поле $\mathbf{q}(M)$ не будет осевым. #

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называют **центральной** (иногда сферическим) с центром в точке O , если в любой точке M его области определения вектор $\mathbf{a}(M)$ имеет длину, зависящую лишь от расстояния $r = OM$, и направлен вдоль прямой, проходящей через точки O и M . Выбрав точку O как начало радиус-векторов точек пространства, центральное поле $\mathbf{a}(M)$ с центром в точке O можно описать векторной функцией

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}(r) = f(r)\mathbf{r} \quad (7.11)$$

векторного аргумента \mathbf{r} , где $r = |\mathbf{r}| = OM$.

Пример 7.5. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$, описывающее распределение сил в пространстве, называют **силовым**. Примером силового векторного поля является поле тяготения, порождаемое материальной точкой массой m_0 . Пусть эта масса расположена в начале прямоугольной системы координат. Согласно закону Ньютона, на материальную точку M массой m с радиус-вектором \mathbf{r} действует сила притяжения

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mm_0}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad (7.12)$$

где G — гравитационная постоянная (см. 7.1). Таким образом, в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ (пространстве с выколотой точкой) определено силовое поле

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -G \frac{m_0}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad (7.13)$$

которое в данном случае записано как векторная функция векторного аргумента. Вектор $\mathbf{a}(M)$ характеризует силу, с которой масса m_0 притягивает единичную массу, расположенную в точке M . Ясно, что векторное поле $\mathbf{a}(M)$ является центральным.

Другой пример центрального векторного поля — поле сил притяжения или отталкивания, возникающих при взаимодействии точечных электрических зарядов. Пусть точечный заряд q_0 находится в начале координат. В этом случае в соответствии с законом Кулона* на заряд q , помещенный в точку с радиус-вектором \mathbf{r} , действует сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad (7.14)$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная (см. 7.1). Векторная функция

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (7.15)$$

векторного аргумента \mathbf{r} задает в пространстве силовое поле $\mathbf{E}(M)$, значением которого в точке M является вектор напряженности электрического поля, т.е. вектор силы, с которой заряд q_0 отталкивает помещенный в точку M единичный заряд, имеющий с q_0 одинаковый знак. #

На векторные поля, как и на скалярные, можно распространить понятия непрерывности и дифференцируемости. **Векторное поле $\mathbf{a}(M)$** , определенное в пространственной области D , называют **непрерывным (дифференцируемым)** в точке M , если в некоторой прямоугольной системе координат оно

*Ш.О. Кулон (1736–1806) — французский физик.

представляется функцией многих переменных, непрерывной (дифференцируемой) в этой точке. Векторное поле, непрерывное (дифференцируемое) в каждой точке области D , называют непрерывным (дифференцируемым) в D . Введенные понятия не зависят от выбора системы координат, так как если в одной системе координат векторное поле представлено непрерывной (дифференцируемой) функцией, то и в любой другой системе координат оно будет представлено непрерывной (дифференцируемой) функцией.

Для векторных полей можно ввести понятие производной по направлению*.

7.4. Векторные линии

Пусть векторное поле $\mathbf{a}(M)$ определено в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Гладкую кривую Γ в D называют *векторной линией* векторного поля $\mathbf{a}(M)$, если в каждой точке $P \in \Gamma$ касательный вектор к кривой коллинеарен вектору $\mathbf{a}(P)$ (рис. 7.4).

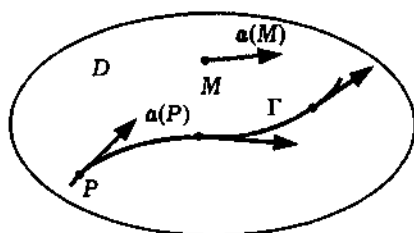


Рис. 7.4

Если векторное поле является силовым, то векторные линии такого поля называют *силовыми линиями*. Также называют векторные линии и в случае, когда речь идет о векторном поле электрической и магнитной напряженности. На векторной

*В [V] такое понятие для векторных функций не вводилось, хотя и было отмечено, что его легко определить аналогично скалярному случаю.

линии стрелками обычно указывают направление векторного поля в точках, принадлежащих этой линии.

В гидродинамике векторные линии называют *линиями тока*. Они представляют собой траектории установившегося движения частиц жидкости. Действительно, в этом случае векторным полем является поле скоростей, а вектор скорости направлен по касательной к траектории движения частицы жидкости.

Пусть в пространственной области D задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$, причем $\mathbf{a}(M) \neq \mathbf{0}$, $M \in D$. Выберем некоторую прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 7.5). Тогда векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в этой системе координат будет представлено векторной функцией $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ с координатными функциями $a_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Пусть векторная линия Γ в D задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t), \\ x_3 = x_3(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (7.16)$$

В точке P , которой соответствует значение t параметра кривой Γ , касательный вектор к кривой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{e}_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + \mathbf{e}_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + \mathbf{e}_3 \frac{dx_3(t)}{dt}. \quad (7.17)$$

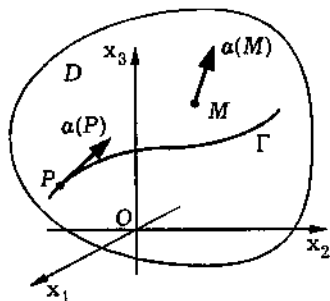


Рис. 7.5

Согласно определению векторной линии, этот вектор коллинеарен вектору $\mathbf{a}(P) = a_1(P)\mathbf{e}_1 + a_2(P)\mathbf{e}_2 + a_3(P)\mathbf{e}_3$. Записав условие коллинеарности двух векторов, получим

$$\frac{x'_1(t)}{a_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{x'_2(t)}{a_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{x'_3(t)}{a_3(x_1, x_2, x_3)},$$

или, переходя к записи в дифференциалах,

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{a_3(x_1, x_2, x_3)}. \quad (7.18)$$

Напомним, что если в уравнении (7.18) какой-либо из знаменателей $a_i(x_1, x_2, x_3)$ обращается в нуль, то нулю равен и числитель соответствующей дроби. В силу условия $\mathbf{a}(M) \neq \mathbf{0}$, $M \in D$, в каждой точке области один из знаменателей отличен от нуля.

Уравнения (7.18) представляют собой симметричную форму записи автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [VIII].

Для перехода к записи этой системы в координатной форме достаточно все отношения в (7.18) приравнять дифференциалу dt параметра t :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.19)$$

Выберем на кривой Γ точку $M_0(x_1^0; x_2^0; x_3^0)$, и пусть этой точке соответствует значение t_0 параметра кривой. Тогда условие принадлежности точки M_0 кривой Γ в координатах имеет вид

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.20)$$

Система дифференциальных уравнений (7.19) в сочетании с уравнениями (7.20) представляет собой задачу Коши [VIII]. Из теоремы Коши существования и единственности решения системы ОДУ [VIII] следует, что если функции $a_i(x_1, x_2, x_3)$,

$i = 1, 2, 3$, удовлетворяют в области D условию Липшица относительно переменных x_i , то в некоторой окрестности точки $t \in [\alpha, \beta]$, соответствующей точке $M \in D$, существует решение системы (7.19), и притом единственное. Это решение в соответствии с (7.16) определяет единственную кривую, проходящую через точку M и имеющую в каждой своей точке P касательный вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{a}(P)$. Таким образом, через произвольную точку $M \in D$, в которой $\mathbf{a}(M) \neq \mathbf{0}$, проходит векторная линия заданного векторного поля, и притом единственная. Отметим, что если функция имеет в области D ограниченные частные производные по всем переменным, то в этой области она удовлетворяет условию Липшица [VIII].

Пример 7.6. Найдем векторные линии поля скоростей твердого тела D , вращающегося вокруг оси. Выберем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ось вращения совпала с координатной осью Ox_3 (см. рис. 7.2). Как следует из примера 7.3, рассматриваемое векторное поле описывается векторной функцией $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, а координатные функции этого поля имеют вид $v_1(x_1, x_2, x_3) = -\Omega x_2$ и $v_2(x_1, x_2, x_3) = \Omega x_1$, $v_3(x_1, x_2, x_3) = 0$. Поэтому в данном случае система (7.18) имеет вид

$$\frac{dx_1}{-\Omega x_2} = \frac{dx_2}{\Omega x_1} = \frac{dx_3}{0}, \quad (7.21)$$

где $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$. Нетрудно увидеть, что система распадается на два независимых уравнения $x_1 dx_1 = -x_2 dx_2$ и $dx_3 = 0$. Решая их, приходим к общему решению системы (7.21) в виде

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - C_1 = 0, \\ x_3 - C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда можно заключить, что векторные линии являются окружностями с центрами на оси Ox_3 , лежащими в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Как и следовало ожидать, они совпадают с траекториями движения отдельных точек твердого

тела. Например, для точки $M(R; 0; 0) \in D$ постоянные в общем решении принимают значения $C_1 = R^2$, $C_2 = 0$, т.е. векторная линия, проходящая через эту точку, есть окружность, лежащая в плоскости $x_3 = 0$ (в координатной плоскости $x_1 O x_2$). Радиус этой окружности равен R , а центр совпадает с началом координат.

Пример 7.7. Пусть твердое тело вращается вокруг оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью $\Omega = \Omega e_3$ и, кроме того, перемещается поступательно вдоль этой оси со скоростью $v = v_0 e_3$, $v_0 > 0$ (см. пример 7.3). Тогда векторное поле $v(M)$ скоростей имеет координатные функции $v_1(x_1, x_2, x_3) = -\Omega x_2$ и $v_2(x_1, x_2, x_3) = \Omega x_1$, $v_3(x_1, x_2, x_3) = v_0$, а система дифференциальных уравнений для векторных линий такова:

$$\frac{dx_1}{-\Omega x_2} = \frac{dx_2}{\Omega x_1} = \frac{dx_3}{v_0}. \quad (7.22)$$

В данном случае можно переменное x_3 взять в качестве независимого и представить систему в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{dx_3} = -\frac{\Omega}{v_0} x_2, \quad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{\Omega}{v_0} x_1. \quad (7.23)$$

Преобразуем эту систему двух ОДУ, записанную в нормальной форме, в дифференциальное уравнение второго порядка. Для этого продифференцируем первое уравнение и с помощью второго уравнения исключим переменное x_2 :

$$\frac{d^2 x_1}{dx_3^2} + \frac{\Omega^2}{v_0^2} x_1 = 0.$$

Это — линейное дифференциальное уравнение, и нетрудно найти его общее решение

$$x_1(x_3) = C_1 \cos p x_3 + C_2 \sin p x_3, \quad (7.24)$$

где

$$p = \frac{\Omega}{v_0}.$$

Теперь функцию $x_2(x_3)$ можно определить из первого уравнения системы (7.23). Используя равенство (7.24), вычисляем производную x_1 по x_3 и подставляем в первое уравнение (7.23). В результате получаем

$$x_2(x_3) = C_1 \sin px_3 - C_2 \cos px_3. \quad (7.25)$$

Общее решение (7.24), (7.25) системы (7.23) позволяет найти векторную линию, проходящую через заданную точку $M^* \in D$ с координатами x_1^* , x_2^* , x_3^* . Для этого достаточно в уравнения (7.24), (7.25) подставить значения координат точки. В результате будем иметь систему двух линейных уравнений относительно неизвестных постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} x_1^* = C_1 \cos px_3^* + C_2 \sin px_3^*, \\ x_2^*(x_3) = C_1 \sin px_3^* - C_2 \cos px_3^*. \end{cases}$$

Отметим, что определитель системы $-\cos^2 px_3^* - \sin^2 px_3^* = -1$ не равен нулю. Потому система имеет решение, и притом единственное.

Если рассматривать координату x_3 в качестве параметра, то приходим к выводу, что уравнения (7.24), (7.25) задают винтовую линию. Ее ось совпадает с координатной осью Ox_3 , а проекция на плоскость $x_3 = 0$ есть окружность с центром в начале координат, квадрат радиуса которой равен $C_1^2 + C_2^2$. Последнее можно установить, если возвести в квадрат (7.24) и (7.25) и сложить результаты. В частности, для точки $M^*(R; 0; 0)$ из (7.24) имеем $C_1 = R$, а из (7.25) — $C_2 = 0$ и вместо (7.24), (7.25) получим

$$x_1(x_3) = R \cos px_3, \quad x_2(x_3) = R \sin px_3. \quad \# \quad (7.26)$$

Пусть в пространственной области D задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$. Возьмем в D гладкую кривую L , для которой в любой ее точке P касательный вектор кривой не является коллинеарным вектору $\mathbf{a}(P)$ (в частности, $\mathbf{a}(P) \neq 0$). Такую кривую будем называть *трансверсальной векторному полю $\mathbf{a}(P)$* . Через каждую точку $P \in L$ можно провести векторную линию рассматриваемого поля. При этом множество всех таких линий, проходящих через точки $P \in L$, образует поверхность S , называемую *векторной поверхностью* векторного поля $\mathbf{a}(M)$ (рис. 7.6). Векторная линия, проходящая через любую точку $P \in S$ векторной поверхности S , целиком лежит на этой поверхности. Поэтому касательная к векторной линии в точке $P \in S$, а значит, и вектор $\mathbf{a}(P)$ будут перпендикулярны вектору $\mathbf{n}(P)$ нормали к S в этой точке.

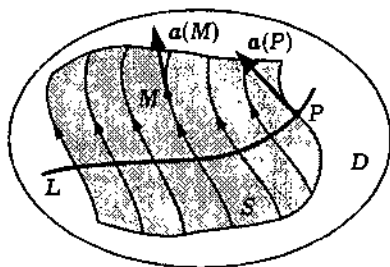


Рис. 7.6

В некоторых случаях векторная поверхность может оказаться плоскостью или частью плоскости. Ясно, что это возможно лишь в случае, когда линия L является плоской. Однако прямой зависимости между формой линии L и формой соответствующей векторной поверхности нет. Выбрав в качестве L прямую или отрезок прямой, мы можем прийти к векторной поверхности, не являющейся плоскостью или частью плоскости. Например, векторные линии векторного поля скоростей вращающегося вокруг оси твердого тела есть окружности с центрами на оси вращения (см. пример 7.6). Если в качестве L взять прямую, параллельную оси вращения, то соответствующая век-

торная поверхность будет прямым круговым цилиндром, осью симметрии которого является ось вращения.

Выбрав в качестве кривой L простой контур, получим векторную поверхность, называемую **векторной трубкой** векторного поля $\mathbf{a}(M)$ (рис. 7.7). Любая векторная линия, не проходящая через точки контура L , целиком лежит либо внутри, либо вне векторной трубки. Для поля скоростей твердого тела, вращающегося относительно фиксированной оси (см. пример 7.6), векторные трубки представляют собой замкнутые торообразные поверхности. На рис. 7.8 изображена половина такой векторной трубки, образованной с помощью окружности L радиуса r_1 , плоскость которой содержит ось вращения, а центр окружности находится на расстоянии R от этой оси (эта поверхность является частью тора).

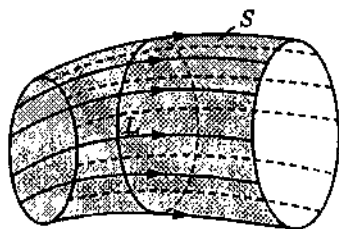


Рис. 7.7

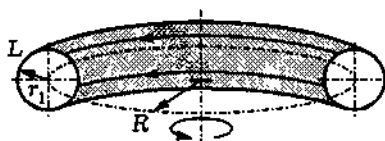


Рис. 7.8

7.5. Поток векторного поля и дивергенция

Пусть в пространственной области D задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$. Выберем гладкую двустороннюю поверхность S в D (не обязательно замкнутую) и зафиксируем с помощью единичного вектора $\mathbf{n}(M)$ нормали одну из ее сторон (рис. 7.9). В случае замкнутой поверхности S зафиксируем ее внешнюю сторону, полагая, что $\mathbf{n}(M)$ — единичный вектор внешней нормали.

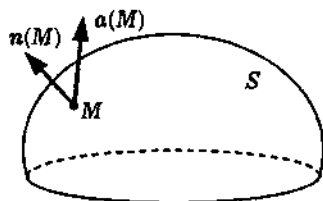


Рис. 7.9

Поверхностный интеграл

$$Q_S = \int_S \mathbf{a}(M) \mathbf{n}(M) dS = \int_S a_n(M) dS, \quad (7.27)$$

где $a_n(M) = \mathbf{a}(M) \mathbf{n}(M)$ — проекция вектора $\mathbf{a}(M)$ на направление единичного вектора $\mathbf{n}(M)$, называют *поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$* через поверхность S в направлении, заданном выбором единичного вектора нормали к S .

Величина Q_S представлена *поверхностным интегралом первого рода* от функции $a_n(M) = \mathbf{a}(M) \mathbf{n}(M)$. Для его существования достаточно, чтобы векторное поле $\mathbf{a}(M)$ было непрерывным в D или хотя бы в точках гладкой поверхности S .

При изменении ориентации поверхности, т.е. при выборе противоположной стороны этой поверхности, значение Q_S изменит знак, так как изменит знак проекция $a_n(M)$. Если поверхность S такова, что в каждой ее точке M векторы $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{n}(M)$ составляют острый угол (в этом случае говорят, что *векторные линии* пересекают поверхность в направлении нормали к ней), то $Q_S > 0$, поскольку $a_n(M) > 0$, $M \in S$. Если же в каждой точке M поверхности векторы $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{n}(M)$ составляют тупой угол (векторные линии пересекают поверхность в направлении, противоположном вектору нормали), то $a_n(M) < 0$, $M \in S$, и $Q_S < 0$.

Поверхность S может быть *векторной поверхностью* векторного поля $\mathbf{a}(M)$ или его *векторной трубкой*. В этом случае поток вектора \mathbf{a} через S равен нулю, так как $\mathbf{a}(M) \mathbf{n}(M) = 0$, $M \in S$, в силу ортогональности вектора $\mathbf{a}(M)$ вектору $\mathbf{n}(M)$ нормали к S в каждой точке поверхности (см. 7.4).

Понятию потока векторного поля можно придавать различные физические интерпретации, выбирая разные физические трактовки векторного поля. Сам термин „поток“ заимствован из гидродинамической задачи вычисления объемного расхода жидкости через заданную поверхность. Если векторное поле

$\mathbf{v}(M)$ описывает поле скоростей при течении жидкости в области D , то объем жидкости, проходящий через элементарную площадку $dS(M)$ в окрестности точки $M \in S \subset D$ в единицу времени, равен $dQ(M) = \mathbf{v}(M)\mathbf{n}(M) dS(M)$. Интегрирование по поверхности S даст объем жидкости

$$Q = \int_S \mathbf{v}(M)\mathbf{n}(M) dS(M), \quad (7.28)$$

проходящий в единицу времени через всю эту поверхность, т.е. объемный расход жидкости через поверхность S . Как видим, объемный расход жидкости через поверхность S равен потоку векторного поля скоростей жидкости через S .

Пусть векторное поле $\mathbf{q}(M)$ в области M описывает плотность теплового потока. Тогда количество теплоты, проходящей в единицу времени через элементарную площадку $dS(M)$, в окрестности точки $M \in S$ равно $dQ(M) = \mathbf{q}(M)\mathbf{n}(M) dS(M)$. Поэтому тепловой поток через поверхность S (т.е. количество теплоты, проходящей через S в единицу времени) равен потоку векторного поля $\mathbf{q}(M)$ через поверхность S :

$$Q = \int_S \mathbf{q}(M)\mathbf{n}(M) dS(M).$$

Как и расход жидкости через поверхность, тепловой поток может иметь положительное, нулевое или отрицательное значение. Отметим, что нулевое значение теплового потока отнюдь не означает, что через поверхность нет теплообмена. В этом случае можно лишь констатировать совпадение количеств теплоты, проходящей через поверхность в противоположных направлениях.

Пример 7.8. Рассмотрим силовое поле $\mathbf{a}(M)$ тяготения, создаваемое точечной массой m_0 , помещенной в начале координат (см. пример 7.5). Это поле описывается векторной

функцией $a(\mathbf{r})$ вида (7.13). Для потока этого векторного поля через поверхность S имеем

$$\int_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS = -Gm_0 \int_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{n} dS = -Gm_0 \int_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}})}{|\mathbf{r}|^2} dS = -Gm_0 \Omega_S,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , а

$$\Omega_S = \int_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}})}{|\mathbf{r}|^2} dS.$$

Величиной Ω_S измеряется *телесный угол**, под которым поверхность S видна из начала координат. #

Рассмотрим поток векторного поля $\mathbf{v}(M)$ через замкнутую поверхность S . Векторное поле будем трактовать как поле скоростей течения жидкости. В этом случае положительное значение потока векторного поля через замкнутую поверхность S означает, что из области, ограниченной поверхностью S , вытекает жидкости больше, чем в нее втекает. Значит, в области имеются точки или подобласти, в которых жидкость образуется (например, происходит образование воды при таянии снега или льда). Точки такого рода называют *источниками векторного поля*. Аналогично отрицательное значение потока через поверхность S означает, что в область втекает жидкости больше, чем из нее вытекает. Значит, в области есть точки, в которых жидкость исчезает (например, испаряется или замерзает). Такие точки называют *стоками векторного поля*.

Источники и стоки могут быть точечными или распределенными. На наличие точечных источников в области указывают

*Под телесным углом понимают часть пространства, заключенную внутри конической поверхности. Телесный угол измеряют площадью единичной сферы, вырезаемой конической поверхностью, причем центр сферы расположен в вершине конической поверхности. Единица измерения телесного угла — стерадиан, выражающий величину телесного угла, который на единичной сфере вырезает площадь, равную единице.

векторные линии, начинающиеся в области, а на наличие точечных стоков — векторные линии, заканчивающиеся в области. На рис. 7.10 точка M_1 возникновения векторных линий является источником, а точка M_2 окончания векторных линий — стоком.

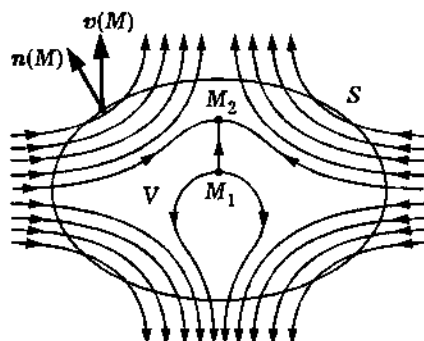


Рис. 7.10

Точечный источник или сток характеризуют *интенсивностью*, равной объему жидкости, которая возникает или исчезает в этой точке в единицу времени, а распределенные источники и стоки — плотностью интенсивности, т.е. количеством жидкости, возникающей или исчезающей в единице объема в единицу времени. Интенсивность стоков удобно считать отрицательной, полагая, что сток — это источник отрицательной интенсивности. Тогда поток Q векторного поля скоростей через поверхность S получает естественную интерпретацию как суммарная интенсивность всех источников и стоков в области, ограниченной этой поверхностью.

Понятия источника (стока) и его интенсивности в задачах различного физического содержания приобретают различный смысл. Так, в случае векторного поля электрической напряженности роль источников (стоков) играют положительные (отрицательные) заряды, а их интенсивность измеряется величиной этих зарядов. Если же векторное поле описывает тепловой поток, то источники и стоки характеризуют выделение и погло-

шение теплоты, причем интенсивность источника (стока) представляет собой количество теплоты, выделяемой (поглощаемой) в единицу времени.

Остановимся на случае распределенных источников векторного поля. Такие источники могут быть распределены по некоторой области пространства, по некоторой поверхности или линии. Если источники распределены по области D , ограниченной замкнутой поверхностью S , то отношение потока Q_S векторного поля через поверхность S к объему V области D есть средняя плотность источников векторного поля в области D . Зафиксировав некоторую точку M , полагая, что область D содержит M , перейдем к пределу при $d_D \rightarrow 0$ (d_D — диаметр области D):

$$\lim_{d_D \rightarrow 0} \frac{Q_S}{V} = \lim_{d_D \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} n dS. \quad (7.29)$$

Если этот предел существует, то его значение определяет интенсивность распределенного источника векторного поля в точке M . Отметим, что этот предел аналогичен пределу, определяющему плотность вещества в точке (см. 7.1).

Предел (7.29), если он существует, называют *дивергенцией* (иногда расходимостью) векторного поля \mathbf{a} в точке $M \in D$, заданного в пространственной области D , и обозначают через $\operatorname{div} \mathbf{a}$. Символ div образован из первых букв латинского слова *divergentia* — расхождение. Этот символ, как и сам термин „дивергенция“, ввел в 1878 г. У.К. Клиффорд*. Величину с противоположным знаком Дж.К. Максвелл называл конвергенцией и обозначал conv (от латинского слова *convergo* — схожусь).

Дивергенция $\operatorname{div} \mathbf{a}$ векторного поля \mathbf{a} в точке M есть скаляр (действительное число). Рассматривая дивергенцию в каждой точке области определения векторного поля \mathbf{a} , мы получаем скалярное поле $\operatorname{div} \mathbf{a}$. Обратим внимание на то, что градиент

*У.К. Клиффорд (1845–1879) — английский математик.

$\text{grad } u$ скалярного поля u есть векторное поле, в то время как дивергенция $\text{div } \mathbf{a}$ векторного поля \mathbf{a} есть скалярное поле.

Дивергенция векторного поля в заданной точке, как предел отношения потока векторного поля к объему, не связана с выбором системы координат. Однако вычисление дивергенции в конкретном случае скорее всего потребует использования какой-либо системы координат. Выясним, как дивергенция векторного поля записывается в прямоугольной системе координат.

Пусть векторное поле $\mathbf{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо в пространственной области D , т.е. в некоторой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ представлено непрерывно дифференцируемой векторной функцией

$$\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = (a_1(x_1, x_2, x_3) \ a_2(x_1, x_2, x_3) \ a_3(x_1, x_2, x_3))^T.$$

Выберем в области D замкнутую поверхность S и определим единичный вектор внешней нормали к этой поверхности в точке M с помощью направляющих косинусов $n_1(M)$, $n_2(M)$, $n_3(M)$.

Тогда, раскрывая скалярное произведение $\mathbf{a}\mathbf{n}$ в ортонормированном базисе и применяя формулу Остроградского — Гаусса, для интеграла в (7.29) получим

$$\oint_S \mathbf{a}\mathbf{n} \, dS = \oint_S \sum_{i=1}^3 a_i n_i \, dS = \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \, dV. \quad (7.30)$$

Используя непрерывность частных производных $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ в области D , теорему о среднем значении для тройного интеграла и определение (7.29) дивергенции векторного поля, в произвольной точке M находим

$$\text{div } \mathbf{a}(M) = \lim_{d_D \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \, dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i(M)}{\partial x_i}. \quad (7.31)$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial a_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}. \quad (7.32)$$

Операция вычисления дивергенции обладает свойством линейности: для произвольных дифференцируемых векторных полей $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{b}(M)$ и произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$\operatorname{div}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{a} + \beta \operatorname{div} \mathbf{b}. \quad (7.33)$$

Аналогом правила дифференцирования произведения можно назвать следующее свойство. Если $f(M)$ — дифференцируемое в D скалярное поле, а $\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемое в D векторное поле, то

$$\operatorname{div}(f\mathbf{a}) = f \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} f. \quad (7.34)$$

В самом деле, в соответствии с (7.32) и правилом дифференцирования произведения находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{a}) &= \frac{\partial(fa_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(fa_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(fa_3)}{\partial x_3} = f \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) + \\ &+ a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = f \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} f. \end{aligned}$$

Если \mathbf{a} — постоянное (однородное) векторное поле, то $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. В этом случае $\operatorname{div}(f\mathbf{a}) = \mathbf{a} \operatorname{grad} f$.

Пример 7.9. Вычислим дивергенцию векторного поля \mathbf{v} скоростей точек твердого тела, вращающегося относительно оси Ox_3 с угловой скоростью Ω (см. пример 7.3).

Указанное векторное поле описывается функцией

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = (-\Omega x_2 \ \Omega x_1 \ 0)^T.$$

Используя (7.32), находим

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(-\Omega x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\Omega x_1)}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, дивергенция поля скоростей вращающегося твердого тела в любой точке тела равна нулю.

Пример 7.10. *Центральное векторное поле* с центром в начале координат описывается векторной функцией вида $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, а $r = |\mathbf{r}|$. Полагая, что функция $f(r)$ дифференцируема, вычислим дивергенцию этого векторного поля.

Центральное векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ можно рассматривать как произведение скалярного поля $f(r)$ и векторного поля \mathbf{r} . Считаем, что центром векторного поля является начало прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда $\mathbf{r} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ и

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3. \quad (7.35)$$

Для скалярного поля $f(r)$ с учетом равенства $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и правила дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(r) &= \left(f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_3} \right)^T = \\ &= \frac{f'(r)}{r} (x_1 \ x_2 \ x_3)^T = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Теперь в соответствии с (7.34) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= f(r) \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \operatorname{grad} f(r) = \\ &= 3f(r) + \mathbf{r} \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r} = 3f(r) + r f'(r). \quad (7.36) \end{aligned}$$

В частности, если производная функции $f(r)$ ограничена в окрестности точки $\mathbf{r} = 0$, то $r f'(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и в этом случае

дивергенция центрального векторного поля в его центре равна $3f(0)$.

Остановимся на частном случае центрального векторного поля — *силовом поле* тяготения, создаваемого материальной точкой массой m_0 , помещенной в начало координат. В этом случае в соответствии с (7.13) имеем $f(r) = -\frac{Gm_0}{r^3}$, где G — гравитационная постоянная (см. 7.1). Силовое поле, создаваемое в пустоте помещенным в начало координат электрическим зарядом q_0 , имеет аналогичный вид с $f(r) = q_0/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, где ϵ_0 — электрическая постоянная (см. 7.1). Для этих полей можем записать $f(r) = A/r^3$, где $A = \text{const}$. Эта функция дифференцируема при $r \neq 0$, так что подставляя ее в (7.36), находим

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 3\frac{A}{r^3} + r \left(-3\frac{A}{r^4} \right) = 0, \quad r \neq 0,$$

т.е. дивергенция рассмотренных силовых полей при $r \neq 0$ равна нулю. #

Понятия потока и дивергенции векторного поля позволяют получить более краткую векторную запись формулы Остроградского — Гаусса. Для этого в формуле нужно рассмотреть поверхностный интеграл как поток некоторого векторного поля, а тройной интеграл — как интеграл от дивергенции того же векторного поля.

Теорема 7.1 (теорема Остроградского — Гаусса). Если векторное поле $\mathbf{a}(M)$ дифференцируемо в пространственной области D , то для любой замкнутой области $V \subset D$, ограниченной замкнутой кусочно гладкой поверхностью S , верно равенство

$$\oint_S \mathbf{a} n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV, \quad (7.37)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

7.6. Циркуляция векторного поля и ротор

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^3$ заданы непрерывное векторное поле $\mathbf{a}(M)$ и гладкая кривая L , на которой определено направление обхода выбором начальной и конечной точек. На этой кривой в каждой точке M в соответствии с направлением обхода можно определить единичный касательный вектор $\mathbf{t}(M)$, который является непрерывной функцией точки (рис. 7.11). Криволинейный интеграл

$$I_L = \int_L \mathbf{a} \mathbf{t} ds = \int_L a_t(M) ds, \quad (7.38)$$

где ds — дифференциал длины дуги кривой L , в теории поля называют **линейным интегралом** от векторного поля \mathbf{a} вдоль кривой L .

Понятие линейного интеграла легко переносится на произвольные кусочно гладкие кривые. Для его существования достаточно, чтобы кривая была кусочно гладкой, а векторное поле — кусочно непрерывным на L .

Замечание 7.1. В случае *силового поля* линейный интеграл вдоль кривой L представляет собой работу, которую силовое поле совершает при перемещении материальной точки вдоль кривой из ее начальной точки в конечную. Иногда о линейном интеграле как о работе говорят в случае произвольного векторного поля. #

Линейный интеграл по замкнутой кривой (контуру) традиционно называют **циркуляцией векторного поля**. Это понятие было введено в 1858 г. Г.Л.Ф. Гельмгольцем*, а тер-

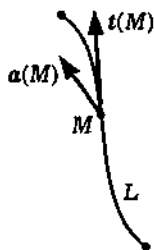


Рис. 7.11

*Г.Л.Ф. Гельмгольц (1821–1894) — немецкий физик, математик, физиолог и психолог.

мин „циркуляция“ (от латинского слова *circulatio* — вращение) предложил У. Томсон*.

Пример 7.11. Векторное поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси с угловой скоростью Ω , описывается векторной функцией $v(r) = \Omega \times r$ (см. пример 7.3). В качестве контура интегрирования выберем окружность L с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Центр окружности возьмем как начало радиус-вектора r . Циркуляция Γ_L векторного поля $v(r)$ вдоль L может быть представлена в виде

$$\Gamma_L = \oint_L v t ds = \oint_L (\Omega \times r) t ds = \oint_L \Omega r t ds, \quad (7.39)$$

где под знаком последнего интеграла стоит смешанное произведение трех векторов.

На окружности L выберем направление обхода против часовой стрелки, если смотреть на окружность с конца вектора Ω , приложенного к точке O . Тогда в каждой точке $M \in L$ вектор Ω , радиус-вектор r этой точки и касательный вектор $t(M)$ к окружности L в точке M образуют правую тройку (рис. 7.12). Поскольку эти векторы попарно ортогональны, их смешан-

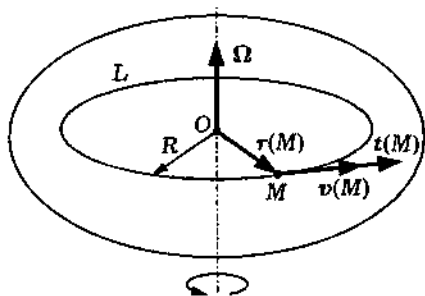


Рис. 7.12

*У. Томсон, лорд Кельвин (1824–1907) — английский физик и математик.

ное произведение равно произведению длин этих векторов, т.е. $\Omega r t = \Omega R = \text{const}$, где Ω — длина вектора Ω . Отсюда следует, что $\Gamma_L = 2\pi\Omega R^2$. Отметим, что значение контурного интеграла оказалось пропорциональным площади круга, ограниченного этим контуром. Отношение циркуляции вдоль окружности к площади этой окружности равно $\frac{\Gamma_L}{F} = 2\Omega$ и не зависит от радиуса окружности. #

Ненулевое значение циркуляции силового поля указывает на то, что это поле производит работу при перемещении материальной точки, возвращающейся в исходное положение. В этом случае говорят о вихревом характере силового поля. Чтобы охарактеризовать, в какой степени и где поле является вихревым, поступим следующим образом. Выберем некоторый единичный вектор n , точку M_0 в области определения векторного поля a . В плоскости σ , перпендикулярной вектору n и проходящей через точку M_0 , возьмем простой кусочно гладкий контур L , окружающий точку M_0 и ограничивающий в плоскости область с площадью F (рис. 7.13). Предел

$$\omega_n(M_0) = \lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{F} \oint_L a t ds \quad (7.40)$$

отношения циркуляции вдоль контура к площади, ограниченной этим контуром, если он существует, называют *завихренностью* векторного поля в точке M_0 в направлении вектора n .

Например, завихренность плоского векторного поля скоростей точек вращающегося твердого тела в направлении вектора

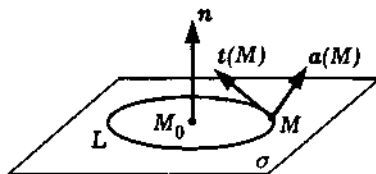


Рис. 7.13

Ω угловой скорости для любой точки M_0 на оси вращения будет равна 2Ω (см. пример 7.11).

Оказывается, что завихренность векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M_0 в направлении единичного вектора \mathbf{n} можно представить как проекцию некоторого вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление вектора \mathbf{n} . Вектор $\boldsymbol{\omega}$ можно определить его проекциями на направления базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Его называют *ротором* (иногда вихрем) векторного поля в точке M_0 и обозначают $\text{rot } \mathbf{a}(M)$. Термин „ротор“ (от латинского слова *rotare* — вращаю) и обозначение rot ввел в 1878 г. У. Клиффорд, но до него это обозначение наряду с обозначением curl (по-английски вихрь, завиток, спираль) применял Дж. Максвелл.

Поскольку завихренность векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M_0 по направлению \mathbf{n} есть проекция на это направление вектора $\text{rot } \mathbf{a}(M_0)$, наибольшее значение в точке M_0 она достигает в направлении, определяемом самим ротором векторного поля. Таким образом, можно сказать, что ротор векторного поля в точке M_0 — это вектор, в направлении которого завихренность поля в точке M_0 максимальная, причем длина вектора равна этому максимальному значению.

Понятиям циркуляции и ротора можно дать гидродинамическую интерпретацию. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{v}(M)$ скоростей частиц жидкости, заданное в некоторой пространственной области D . Поместим мысленно в точку $M_0 \in D$ центр тонкого плоского диска турбинки, лопасти которой расположены по ее ободу, представляющему собой окружность L радиуса R (рис. 7.14). Предположим, что погружение турбинки в жидкость не изменяет поля скоростей и при воздействии частиц жидкости на лопасти турбинка может вращаться без трения относительно своей оси. В каждой точке $M \in L$ действие жидкости на лопасти определяется проекцией вектора $\mathbf{v}(M)$ на направление вектора $\mathbf{t}(M)$, касательного к L в этой точке, т.е. значением $v_t(M) = \mathbf{v}(M)\mathbf{t}(M)$. Суммарное воздействие жидкости на турбинку при бесконечно большом числе лопастей будет

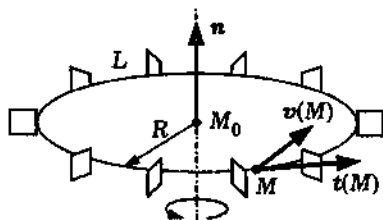


Рис. 7.14

пропорционально интегралу

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{v} t ds,$$

т.е. циркуляции поля скоростей жидкости по контуру L .

Предположим, что турбинка имеет малые размеры, т.е. величина R мала. В этом случае угловая скорость турбинки будет характеризовать завихренность поля скоростей жидкости в точке M_0 в направлении оси турбинки. Изменяя направление оси, можно найти такое ее направление, при котором угловая скорость вращения турбинки будет наибольшей. Это направление совпадает с направлением ротора $\text{rot } \mathbf{v}(M_0)$ поля скоростей в точке M_0 , а угловая скорость вращения турбинки при этом пропорциональна $|\text{rot } \mathbf{v}(M_0)|$.

Циркуляция векторного поля и ротор не связаны с выбором какой-либо системы координат, однако вычисление их значений возможно лишь в том случае, если векторное поле будет представлено в некоторой системе координат. Выясним, как выражается ротор векторного поля $\mathbf{a}(M)$, представленного в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ функцией

$$\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = (a_1(x_1, x_2, x_3) \ a_2(x_1, x_2, x_3) \ a_3(x_1, x_2, x_3))^T.$$

В этом случае циркуляция Γ_L векторного поля $\mathbf{a}(M)$ вдоль плоского простого контура L представляется криволинейным

интегралом от координатных функций a_1, a_2, a_3 векторного поля $\mathbf{a}(M)$:

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{a} t ds = \oint_L a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3. \quad (7.41)$$

Если векторное поле $\mathbf{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо в области D , содержащей контур L , то к этому криволинейному интегралу можно применить формулу Стокса:

$$\Gamma_L = \oint_L a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = \int_S \left(\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) n_3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) n_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) n_2 \right) dS, \quad (7.42)$$

где S — замкнутая область в плоскости контура L , ограниченная этим контуром, а n_i — направляющие косинусы вектора \mathbf{n} нормали к плоскости контура L , выбранного так, что заданное на контуре направление обхода направлено против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n} . Стыгивая контур L к фиксированной точке M_0 , получим выражение для проекции ротора векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M_0 на направление \mathbf{n} (F обозначает площадь плоской замкнутой области S)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0)) \mathbf{n} = \lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{F} \int_S \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) n_3 dS + \\ + \lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{F} \int_S \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) n_1 dS + \lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{F} \int_S \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) n_2 dS.$$

Пределы в правой части равенства в силу непрерывности подынтегральных функций равны значениям этих функций в точке M_0 . Таким образом,

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0)) \mathbf{n} = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) n_3 + \\ + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) n_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) n_2. \quad (7.43)$$

Формула (7.43) выражает завихренность векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T$. Из вида правой части формулы вытекает, что завихренность есть проекция на \mathbf{n} вектора с координатами $\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}$, $\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}$. Таким образом, найден ротор векторного поля в точке M_0 , а указанные выражения есть его координаты, т.е.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0) = & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \\ & + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Координаты ротора по своему виду похожи на координаты векторного произведения двух векторов. Учитывая это, ротор векторного поля можно записать с помощью символического определителя третьего порядка

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad (7.45)$$

который аналогичен определителю, используемому при вычислении векторного произведения [III]. Если векторное поле плоское и задано функцией $\mathbf{a}(x_1, x_2) = (a_1(x_1, x_2) \ a_2(x_1, x_2))^T$, то ротор этого векторного поля будет иметь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0) = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \quad (7.46)$$

Пример 7.12. Вычислим ротор векторного поля скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O .

В каждый момент времени t векторное поле скоростей $\mathbf{v}(M)$ описывается векторной функцией $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор

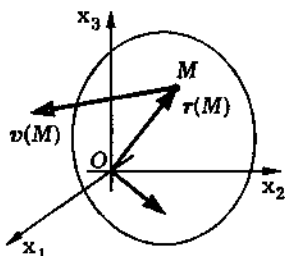


Рис. 7.15

мгновенной угловой скорости. Выберем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O и представим вектор Ω его координатами: $\Omega = (\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3)^T$ (рис. 7.15). Тогда, вычисляя векторное произведение в координатах, получим

$$v(M) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2) e_1 + (\Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3) e_2 + (\Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1) e_3.$$

Теперь, используя формулу (7.45) вычисления ротора в координатах, находим

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 & \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 & \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\Omega_1 e_1 + 2\Omega_2 e_2 + 2\Omega_3 e_3 = 2\Omega.$$

Таким образом, в любой точке M вращающегося тела ротор векторного поля скоростей равен удвоенному вектору мгновенной угловой скорости вращения этого тела. #

Операция вычисления ротора векторного поля является линейной. Если векторные поля $a(M)$ и $b(M)$ дифференцируемы

в области D , то, используя линейность операции дифференцирования, можно показать, что в этой области

$$\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{a} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad (7.47)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Кроме того, можно записать правило для ротора произведения векторного поля на скалярное, аналогичное правилу дифференцирования функций:

$$\operatorname{rot}(f \mathbf{a}) = f \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} f. \quad (7.48)$$

В самом деле, используя представление (7.44) ротора в координатах и правило дифференцирования произведения функций, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f \mathbf{a}) &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial(f a_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(f a_2)}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial(f a_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(f a_3)}{\partial x_1} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial(f a_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(f a_1)}{\partial x_2} \right) = \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) f + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) f + \\ &+ \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) f - \mathbf{e}_1 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} - a_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) - \mathbf{e}_2 \left(a_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) - \\ &- \mathbf{e}_3 \left(a_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = f \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} f. \end{aligned}$$

В частности, если \mathbf{a} — постоянный вектор, то $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ и $\operatorname{rot}(f \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \operatorname{grad} f$.

Пример 7.13. Вычислим ротор центрального векторного поля $\mathbf{a}(M)$, заданного в области D векторной функцией $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$, а функция $f(r)$ является дифференцируемой.

В соответствии с формулой (7.48) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r}) = f(r) \operatorname{rot} \mathbf{r} - \mathbf{r} \times \operatorname{grad} f(r). \quad (7.49)$$

Выберем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом координат в центре O векторного поля $a(M)$. Градиент центрального скалярного поля $f(r)$ коллинеарен радиус-вектору r :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) &= \\ &= \left(\frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{f'(r)y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{f'(r)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^T = \frac{f'(r)}{r} r. \end{aligned}$$

Значит, второе слагаемое в правой части формулы (7.49) равно нулю как векторное произведение двух коллинеарных векторов.

Так как $r = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, то

$$\operatorname{rot} r = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, оба слагаемые в правой части формулы (7.49) нулевые и, следовательно, ротор центрального векторного поля также нулевой. Отметим, что это верно и для осевого векторного поля, которое можно представить в виде $f(r)r$, где в данном случае вектор r есть проекция радиус-вектора точки на плоскость, перпендикулярную оси поля. #

Понятия циркуляции и ротора векторного поля позволяют получить краткую векторную запись формулы Стокса. Для этого левую часть формулы Стокса (7.42) следует интерпретировать как циркуляцию векторного поля, а правую часть — как поток ротора векторного поля через поверхность.

Теорема 7.2 (теорема Стокса). Если векторное поле $a(M)$ непрерывно дифференцируемо в пространственной области D , то для любой кусочно гладкой поверхности S в D , ограниченной простым кусочно гладким контуром L , верно равенство

$$\oint_L a \, ds = \int_S (\operatorname{rot} a) n \, dS. \quad (7.50)$$

7.7. Простейшие типы векторных полей

Рассмотрим некоторые частные типы векторных полей.

Дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(M)$, заданное в пространственной области D , называют **безвихревым векторным полем**, если в любой точке этой области его ротор равен нулевому вектору $\mathbf{0}$, т.е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \mathbf{0}, \quad M \in D. \quad (7.51)$$

Из примера 7.13 следует, что безвихревыми являются *центральное и осевое векторные поля*.

Непрерывное векторное поле $\mathbf{a}(M)$, заданное в области $D \subset \mathbb{R}^3$, называют **бесциркуляционным векторным полем**, если циркуляция этого поля по любому замкнутому контуру L , лежащему в D , равна нулю, т.е.

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{a} \mathbf{t} ds = 0, \quad (7.52)$$

где $\mathbf{t}(M)$ — единичный касательный вектор к контуру L в точке $M \in L$.

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$, заданное в пространственной области D , называют **потенциальным**, если оно является градиентом некоторого скалярного поля $u(M)$, т.е.

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M), \quad M \in D. \quad (7.53)$$

При этом скалярное поле $u(M)$ называют (*скалярным*) **потенциалом** векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Нетрудно убедиться, что гравитационный потенциал материальной точки (см. пример 7.2) и электростатический потенциал точечного заряда (см. пример 7.5) являются скалярными потенциалами соответствующих центральных силовых полей,

которые являются потенциальными в пространстве с выколотой точкой (точкой размещения массы или заряда).

Безвихревое поле, бесциркуляционное поле и потенциальное — близкие понятия, но не эквивалентные. Чтобы выяснить связь между этими понятиями, введем некоторую прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ и обратимся к теореме 6.3. В заданной системе координат рассмотрим дифференцируемое поле $\mathbf{a}(M)$ с координатными функциями $a_1(x_1, x_2, x_3)$, $a_2(x_1, x_2, x_3)$, $a_3(x_1, x_2, x_3)$. Тогда условие безвихревого поля, используя координатную запись (7.44) ротора векторного поля, можно представить в виде

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}.$$

Условие бесциркуляционного поля означает, что криволинейный интеграл второго рода от координатных функций этого поля по любому контуру в области равен нулю. Наконец, условие потенциального поля равносильно утверждению, что выражение $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$ является полным дифференциалом некоторой функции. Согласно теореме 6.3, все три условия для *поверхностно односвязной области D* эквивалентны. В общем случае эти понятия уже различаются. Однако можно утверждать, что в любой области в случае непрерывного векторного поля понятия потенциального поля и бесциркуляционного поля совпадают. Дифференцируемое бесциркуляционное поле является безвихревым, но обратное утверждение верно не всегда.

Отметим, что для потенциального векторного поля $\mathbf{a}(M)$, заданного в области D , скалярный потенциал $u(M)$ определен в D с точностью до постоянного слагаемого. Действительно, вычисление потенциала векторного поля, согласно теореме 6.3, сводится к задаче восстановления функции по ее дифференциалу, а такая задача может быть решена с точностью до постоянного слагаемого.

Если векторное поле $\mathbf{a}(M)$ потенциально в области D , то линейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Согласно формуле Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла, значение линейного интеграла может быть найдено с помощью потенциала $u(M)$ векторного поля:

$$\int_A^B \mathbf{a}t ds = u(M) \Big|_A^B = u(B) - u(A). \quad (7.54)$$

У непрерывного потенциального поля в поверхностно односвязной области нет замкнутых векторных линий. Действительно, предположим, что непрерывное потенциальное поле $\mathbf{a}(M)$ имеет замкнутую векторную линию L . Тогда, с одной стороны, циркуляция вдоль этой линии равна нулю, так как поле потенциально. С другой стороны, в каждой точке M контура L вектор $\mathbf{a}(M)$ коллинеарен единичному касательному вектору $t(M)$ к кривой L , т.е. $\mathbf{a}(M) = \lambda(M)t(M)$, где скалярная функция $\lambda(M)$ непрерывна на L и не обращается в нуль, поскольку на векторной линии $\mathbf{a}(M) \neq 0$. Так как $\lambda(M) \neq 0$, то функция $\lambda(M)$ знакопостоянна на L . Исходя из этого, вводя на контуре L натуральный параметр $s \in [0, s_0]$, получаем

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{a}t ds = \int_0^{s_0} \lambda(s) ds \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что у потенциального поля в односвязной области нет замкнутых векторных линий.

Теорема 6.3 не только выявляет связь между тремя типами векторных полей, но и дает удобный способ вычисления потенциала векторного поля. Чтобы найти потенциал $u(M)$ заданного в области D векторного поля $\mathbf{a}(M)$, можно выбрать некоторую фиксированную точку $M_0 \in D$ и вычислить линейный интеграл вдоль любого пути в D , соединяющего точки M_0

и M . Тогда из равенства (7.54) получаем

$$u(M) = u(M_0) + \int_{M_0}^M at ds. \quad (7.55)$$

В этой формуле слагаемое $u(M_0)$ может принимать любые действительные значения. Потенциал можно также найти, интегрируя систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = a_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_3, \end{cases}$$

где a_1, a_2, a_3 — координатные функции векторного поля. Эта система вытекает из координатной записи градиента скалярного поля.

Пример 7.14. Проверим, является ли потенциальным векторное поле $\mathbf{a}(M)$, заданное в пространстве функцией

$$\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 + x_2x_3 \quad x_2^3 + x_1x_3 \quad x_3^3 + x_1x_2)^T.$$

Рассматриваемое поле имеет координатные функции $a_1 = x_1^3 + x_2x_3$, $a_2 = x_2^3 + x_1x_3$ и $a_3 = x_3^3 + x_1x_2$. Пользуясь представлением (7.44) ротора в координатах, находим проекции $\text{rot } \mathbf{a}$ на координатные оси:

$$(\text{rot } \mathbf{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = x_1 - x_1 = 0,$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_2 = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = x_2 - x_2 = 0,$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = x_3 - x_3 = 0.$$

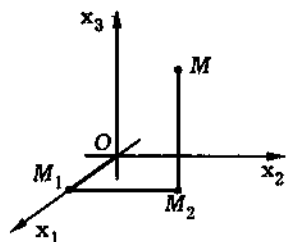


Рис. 7.16

Итак, всюду в пространстве $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, т.е. векторное поле $\mathbf{a}(M)$ является безвихревым, а значит, и потенциальным. Найдем потенциал этого поля. Для этого вычислим линейный интеграл векторного поля вдоль пути, соединяющего точку $O(0;0;0)$ с точкой $M(x;y;z)$. В качестве пути, соединяющего эти точки, выберем трехзвенную ломаную OM_1M_2M , где звено OM_1 параллельно оси Ox_1 , звено M_1M_2 — оси Ox_2 , а звено M_2M — оси Ox_3 (рис. 7.16). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, x_3) &= C + \int_0^{x_1} \xi^3 d\xi + \int_0^{x_2} \eta^3 d\eta + \int_0^{x_3} (\zeta^3 + x_1 x_2) d\zeta = \\
 &= C + \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}{4} + x_1 x_2 x_3. \quad \#
 \end{aligned}$$

Дифференцируемое **векторное поле** $\mathbf{a}(M)$, заданное в пространственной области D , называют **соленоидальным**, если в любой точке $M \in D$ его дивергенция равна нулю, т.е.

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0, \quad M \in D. \quad (7.56)$$

Слово „соленоидальный“ (от греческих слов $\sigma\omega\lambda\eta\nu$ — трубка и $\epsilon\iota\delta\omicron\varsigma$ — вид) ввел А.М. Ампер*, а термин „соленоидальное поле“ принадлежит У. Томсону. Соленоидальное поле иногда называют **трубчатым**. Примером такого поля является магнитное поле, возникающее при прохождении электрического

*А.М. Ампер (1775–1836) — французский физик и математик.

тока через катушку индуктивности (катушку индуктивности обычно называют соленоидом). Также соленоидальными являются векторное поле скоростей твердого тела, вращающегося относительно некоторой оси с постоянной угловой скоростью (см. пример 7.9), и центральное силовое поле, создаваемое помещенной в его центре материальной точкой или точечным электрическим зарядом (см. пример 7.10). В соленоидальном поле нет источников ни положительной, ни отрицательной интенсивности.

Рассмотрим область V внутри векторной трубки соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ между двумя ее произвольными поперечными сечениями S_1 и S_2 (рис. 7.17), которые могут быть не обязательно плоскими. Для потока векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через границу S области V получаем

$$\oint_S \mathbf{a} n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 0.$$

В каждой точке M боковой поверхности S_0 области V единичный вектор $\mathbf{n}(M)$ нормали к поверхности перпендикулярен вектору $\mathbf{a}(M)$, т.е. $\mathbf{a}(M)\mathbf{n}(M) = 0$, $M \in S_0$. Поэтому поток векторного поля через боковую поверхность S_0 равен нулю, и для сечений S_1 и S_2 векторной трубки имеем

$$\int_{S_1} \mathbf{a} n dS = \int_{S_2} \mathbf{a} n dS, \quad (7.57)$$

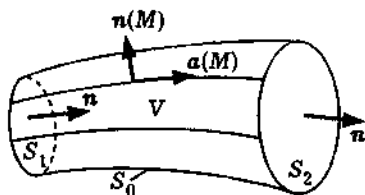


Рис. 7.17

где векторы нормали на поверхностях S_1 и S_2 выбраны по направлению векторного поля, т.е. на одной из этих поверхностей нормаль по отношению к области V внешняя, а на другой — внутренняя.

Таким образом, поток соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$, $M \in D$, через любое сечение векторной трубки постоянен. Поэтому векторные трубки непрерывного соленоидального поля, поток в которых отличен от нуля, не могут начинаться или обрываться внутри области D . В самом деле, если бы векторная трубка начиналась или заканчивалась в точке $M \in D$, т.е. площадь ее поперечного сечения обращалась бы в нуль, то в этой точке модуль вектора \mathbf{a} стремился бы к бесконечности, что противоречит условию непрерывности поля. Это условие будет нарушено и в случае, если векторная трубка начинается или заканчивается внутри области и ее торец имеет конечную площадь. Следовательно, векторные трубки такого поля либо замкнуты, либо выходят на границы области.

В прикладных задачах большую роль играют векторные поля, которые являются одновременно потенциальными и соленоидальными. Такие поля не имеют ни вихрей, ни источников, и их называют *лапласовыми** или гармоническими *векторными полями*. Так как, согласно условию потенциальности поля, $\mathbf{a} = \text{grad } u$, а в силу условия его соленоидальности $\text{div } \mathbf{a} = 0$, для потенциала $u(M)$ лапласова векторного поля получаем уравнение

$$\text{div grad } u = 0, \quad (7.58)$$

которое в прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0. \quad (7.59)$$

Это уравнение называют *уравнением Лапласа*, его решения — *гармоническими функциями*.

*П.С.Лаплас (1749–1827) — французский астроном, математик и физик.

Уравнение Лапласа в 1761 г. изучали Л. Эйлер и Ж.Л. Даламбер применительно к задачам гидромеханики, а в 1782 г. его использовал П.С. Лаплас при построении теории гравитационного потенциала. Оно является одним из основных уравнений математической физики.

Примером лапласова поля является центральное силовое поле, создаваемое помещенной в его центре материальной точкой или точечным электрическим зарядом, поскольку, как установлено выше, оно одновременно и потенциально, и соленоидально.

Дополнение 7.1. Безвихревое поле в многосвязной области

При изучении простейших типов *векторных полей* (см. 7.7) использовалось понятие *поверхностно односвязной области*. В такой области любой контур является границей некоторой лежащей в области поверхности. В поверхностно связанных областях понятия безвихревого поля и потенциального поля совпадают. Чтобы пояснить термин „поверхностно односвязная область“, рассмотрим два примера. Полый шар, т.е. область, заключенная между двумя концентрическими сферами (рис. 7.18), является поверхностно односвязной областью. А область, ограниченная сферой и цилиндром меньшего радиуса (внутри сферы, но вне цилиндра, рис. 7.19), не является

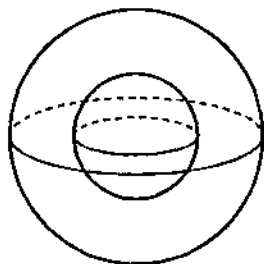


Рис. 7.18

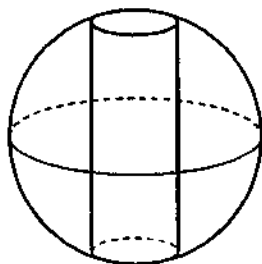


Рис. 7.19

поверхностно односвязной, поскольку на контур, охватывающий цилиндр, нельзя натянуть поверхность, целиком лежащую в области.

В этом параграфе под многосвязной областью будем понимать пространственную область, не являющуюся поверхностно односвязной. Рассмотрим *безвихревое векторное поле* $\mathbf{a}(M)$, непрерывно дифференцируемое в многосвязной области D , получаемой в пространстве изъятием двух прямых круговых цилиндров S_1 и S_2 с параллельными осями (рис. 7.20). В силу определения безвихревого поля имеем $\text{rot } \mathbf{a}(M) = \mathbf{0}$, $M \in D$. Поэтому для любого контура L , не охватывающего оба цилиндра или один из них (контур L_1 на рис. 7.20), согласно *теореме Стокса*, циркуляция Γ_L по контуру L равна нулю. Однако, если контур охватывает один из цилиндров или оба цилиндра (контур L_2, L_3, L_4 на рис. 7.20), на этот контур уже нельзя натянуть поверхность, целиком лежащую в D , и теорема Стокса уже не позволяет сделать вывод, что циркуляция равна нулю. Таким образом, следует ожидать, что безвихревое поле может не быть бесциркуляционным и, следовательно потенциальным.

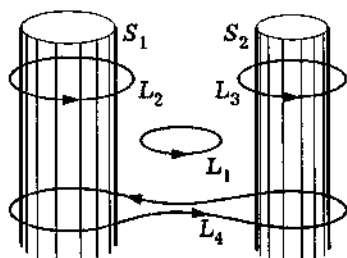


Рис. 7.20

Пример 7.15. Рассмотрим *стационарное плоское осесимметричное поле* плотности установившегося теплового потока в достаточно длинной трубе. Эту трубу будем представлять как область между двумя соосными прямыми круговыми цилиндрами с радиусами сечений R_0 для внутренней стенки трубы и R для внешней стенки (поперечное сечение D трубы пока-

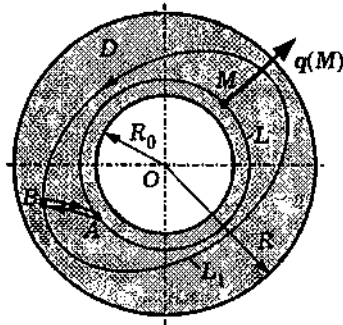


Рис. 7.21

зано на рис. 7.21). Это поле можно считать осесимметричным, а если предположить, что материал трубы однородный, то и плоским. Пусть приходящийся на единицу длины трубы тепловой поток Q направлен от внутренней цилиндрической поверхности трубы к наружной. В силу осевой симметрии плотность теплового потока в любой точке M цилиндрической поверхности радиуса $r \in [R_0, R]$ одинакова и равна $q(M) = Q/(2\pi r)$, а вектор q плотности теплового потока перпендикулярен этой поверхности. Поэтому векторное поле $q(M)$ в плоской области D определяется векторной функцией

$$q(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} r, \quad (7.60)$$

где r — радиус-вектор точки, началом которого является точка O пересечения оси трубы с плоскостью поперечного сечения (см. рис. 7.21).

Таким образом, поле вектора плотности теплового потока в трубе является *осевым*. В соответствии с примером 7.13 ротор этого поля тождественно равен нулевому вектору, т.е. поле является безвихревым. Циркуляция векторного поля по окружности L радиуса $r \in [R_0, R]$ с центром на оси трубы равна нулю, поскольку в любой точке $M \in L$ такого контура вектор $q(M)$ ортогонален касательному вектору $t(M)$ к контуру L и $q(M)t(M) = 0$ на всем контуре L .

Покажем, что циркуляция равна нулю по любому контуру, охватывающему внутреннюю поверхность трубы. Действительно, возьмем наряду с окружностью L произвольный простой контур L_1 , однократно охватывающий эту поверхность (см. рис. 7.21), не обязательно лежащий в плоскости поперечного сечения трубы, и соединим какие-либо точки $A \in L$ и $B \in L_1$ кривой, расположенной в трубе, и по этой кривой произведем разрез. Контур L^* , состоящий из L , L_1 и дважды пройденного разреза AB , уже не будет охватывать внутреннюю поверхность трубы. На такой контур можно натянуть поверхность, целиком принадлежащую D . Поэтому циркуляция по такому контуру в безвихревом векторном поле, согласно теореме Стокса, равна нулю. Но значения криволинейного интеграла по разрезу, проходимому дважды, взаимно уничтожаются, и мы заключаем, что циркуляции по контурам L и L_1 равны или максимум отличаются знаком. Но циркуляция по контуру L равна нулю. Следовательно, равна нулю и циркуляция по контуру L_1 .

Итак, циркуляция рассматриваемого векторного поля по любому контуру, целиком расположенному в области D , равна нулю, т.е. это поле бесциркуляционное и поэтому потенциальное. Чтобы найти потенциал этого поля, можно вычислить линейный интеграл от точки M_0 на внутренней поверхности трубы до произвольной точки M . В качестве пути интегрирования можно взять кривую, составленную из дуги M_0M_1 окружности радиуса R_0 и отрезка M_1M вдоль прямой, проходящей через точку O . При этом интеграл по дуге окружности будет равен нулю, и мы получим

$$\begin{aligned} u(M) - u(M_0) &= \int_{M_1M} q \frac{r}{r} dr = \int_{R_0}^r \frac{Q}{2\pi r^2} r \frac{r}{r} dr = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \int_{R_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi} \ln r \Big|_{R_0}^r = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{R_0}. \quad (7.61) \end{aligned}$$

Найденный потенциал $u(M)$ векторного поля $q(M)$ связан с распределением температуры в стенке трубы. Действительно, из курса физики известно, что вектор q плотности теплового потока при неравномерном распределении температуры T , согласно закону Фурье*, пропорционален ее градиенту:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (7.62)$$

где в данном случае λ — коэффициент теплопроводности материала трубы. Знак минус в равенстве (7.62) указывает на то, что тепловой поток распространяется в сторону убывания температуры. Это равенство означает, что скалярное поле $-\lambda T$ является потенциалом векторного поля $q(M)$, т.е. $u(M) = -\lambda T + C$. Отсюда вытекает, что температура $T(r)$ на расстоянии r от оси трубы может быть вычислена по формуле

$$T(r) = T(R_0) - \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln \frac{r}{R_0}. \quad \#$$

В общем случае проверить, является ли векторное поле бесциркуляционным, достаточно сложно. Поэтому часто приходится применять упомянутый выше критерий потенциальности векторного поля лишь в негативном смысле: наличия в области D хотя бы одного контура, циркуляция по которому отлична от нуля, достаточно для того, чтобы рассматриваемое векторное поле не было потенциальным.

Пример 7.16. Из курса физики известно, что вектор напряженности магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным и тонким прямолинейным проводником, расположенным по оси Ox_3 прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, в точке $M(x_1; x_2; x_3)$ равен

$$H(x_1, x_2, x_3) = \frac{2I}{x_1^2 + x_2^2} (-x_2 \ x_1 \ 0)^T,$$

* Ж.Б.Ж. Фурье (1768–1830) — французский математик и физик.

где I — сила тока, протекающего в проводнике в положительном направлении оси Ox_3 . В данном случае векторное поле определено всюду в пространстве за исключением точек оси Ox_3 , т.е. в многосвязной области D .

Рассматриваемое векторное поле является плоским, поэтому в соответствии с (7.46) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 2I \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) \mathbf{e}_3 = 0.$$

Значит, по любому контуру, не охватывающему проводник с током (т.е. ось Ox_3), циркуляция данного поля равна нулю, поскольку на такой контур можно натянуть поверхность, все точки которой принадлежат области D .

Вычислим циркуляцию по контуру L , однократно охватывающему проводник с током. В качестве такого контура возьмем окружность радиуса R в плоскости x_1Ox_2 с центром в начале координат. Для точек этой окружности $x_1 = R \cos t$ и $x_2 = R \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, поэтому

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{H} t ds = 2I \oint_L \frac{-x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2} = 2I \int_0^{2\pi} \frac{R^2 dt}{R^2} = 4\pi I.$$

Таким образом, $\Gamma_L \neq 0$, т.е. рассматриваемое поле не является потенциальным.

Отметим, что полученное значение Γ_L не зависит от радиуса окружности. Более того, циркуляция по любому контуру L_1 , однократно охватывающему ось Ox_3 , будет равна $4\pi I$. Действительно, рассуждая так же, как и в примере 7.15, можно показать, что циркуляция по контуру L_1 равна циркуляции по окружности L . #

Прием, использованный в примерах 7.15 и 7.16, позволяющий заменить произвольный контур L_1 контуром L простой формы (окружностью), вдоль которого циркуляцию легко вычислить, можно применить в произвольных многосвязных обла-

стях. Если два контура таковы, что их можно соединить разрезом, превратив в один контур, на который можно натянуть поверхность, то циркуляции безвихревого поля по таким контурам равны. Это позволяет утверждать, что циркуляция безвихревого поля не меняется при непрерывном деформировании контура. Если один контур непрерывным деформированием можно преобразовать в другой, то циркуляции безвихревого поля по этим контурам равны.

Дополнение 7.2. Векторный потенциал соленоидального поля

Пусть $\mathbf{a}(M)$ — некоторое непрерывное векторное поле, определенное в пространственной области D . Если существует такое дифференцируемое в D векторное поле $\mathbf{b}(M)$, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}(M) = \mathbf{a}(M), \quad M \in D, \quad (7.63)$$

то векторное поле $\mathbf{b}(M)$ называют **векторным потенциалом** поля $\mathbf{a}(M)$.

Убедимся, что необходимым условием существования у непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}(M)$ векторного потенциала $\mathbf{b}(M)$ является соленоидальность поля $\mathbf{a}(M)$. Для этого введем в области D прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ и представим векторное поле $\mathbf{b}(M)$ некоторой векторной функцией $\mathbf{b}(x_1, x_2, x_3)$ с координатными функциями b_1, b_2, b_3 . В силу правил вычисления дивергенции и ротора в координатах, а также независимости непрерывных смешанных производных от порядка дифференцирования имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3}{\partial x_1} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Равенство $\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0$ означает, что поле $\mathbf{a}(M)$ соленоидально.

Замечание 7.2. Векторный потенциал соленоидального поля определен неоднозначно. Если $\mathbf{b}(M)$ — векторный потенциал векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в области D , то векторным потенциалом поля $\mathbf{a}(M)$ будет и любое векторное поле $\mathbf{b}(M) + \mathbf{v}(M)$, где векторное поле $\mathbf{v}(M)$ удовлетворяет условию $\operatorname{rot} \mathbf{v}(M) \equiv 0$, т.е. $\mathbf{v}(M)$ — безвихревое поле. Действительно, в силу линейности операции вычисления ротора

$$\operatorname{rot}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) = \operatorname{rot} \mathbf{b} + \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

Наоборот, если $\mathbf{b}_1(M)$ и $\mathbf{b}_2(M)$ — два векторных потенциала поля $\mathbf{a}(M)$, то

$$\operatorname{rot}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{b}_1 - \operatorname{rot} \mathbf{b}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0,$$

откуда $\mathbf{b}_1(M) = \mathbf{b}_2(M) + \mathbf{v}(M)$, где $\mathbf{v}(M) = \mathbf{b}_1(M) - \mathbf{b}_2(M)$ — безвихревое поле. В *поверхностно односвязной области* безвихревое поле является потенциальным, и мы можем сказать, что в этом случае векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольного дважды непрерывно дифференцируемого скалярного поля. #

Векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$ соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ позволяет упростить вычисление *потока* Q_S этого *векторного поля* через кусочно гладкую поверхность S , так как в этом случае с помощью теоремы Стокса поток Q_S векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через поверхность S можно заменить циркуляцией Γ_L векторного потенциала вдоль $\mathbf{b}(M)$ границы L поверхности S . Действительно,

$$Q_S = \int_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{b}) \mathbf{n} dS = \oint_L \mathbf{b} \mathbf{t} ds = \Gamma_L, \quad (7.65)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке M ; $\mathbf{t} = \mathbf{t}(M)$ — единичный касательный вектор к кусочно гладкому замкнутому контуру L в точке M . Напомним, что в

соответствии с теоремой Стокса векторы $n(M)$ и $t(M)$ должны быть выбраны так, чтобы направление обхода контура L , определяемое выбором вектора $t(M)$, со стороны вектора $n(M)$ было противоположным ходу часовой стрелки.

Однако не всякое соленоидальное поле имеет векторный потенциал. Расхождение между условием соленоидальности и условием существования векторного потенциала примерно то же, что между понятиями безвихревого поля и потенциального поля (т.е. имеющего скалярный потенциал). В этом убеждает следующее рассуждение.

Если векторное поле $a(M)$ в области D имеет векторный потенциал $b(M)$, то поток поля $a(M)$ через любую замкнутую поверхность S в области D равен нулю. Действительно, выберем на поверхности S простой замкнутый контур L . Этот контур разделит S на две поверхности S_1 и S_2 и будет являться их общей границей. Как уже сказано, поток поля $a(M)$ через поверхность S_1 равен циркуляции поля $b(M)$ вдоль L . Но точно так же поток поля $a(M)$ через поверхность S_2 равен циркуляции поля $b(M)$ вдоль того же контура L . Однако направления обхода контура в этих двух случаях являются противоположными. Значит, сумма двух потоков, равная потоку поля $a(M)$ через всю поверхность S , равна нулю.

Пусть область D такова, что вместе с любой замкнутой поверхностью $S \subset D$ она содержит и область, ограниченную поверхностью S (такую область D будем называть объемно односвязной). Тогда можно показать, используя *теорему Остроградского — Гаусса*, что поток соленоидального поля через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю.

Если же область D не является объемно односвязной, то для некоторых замкнутых поверхностей теорема Остроградского — Гаусса не применима. Примером области, не являющейся объемно односвязной, является полый шар (область между двумя концентрическими сферами). В этой области силовое поле, создаваемое, например, точечной массой, размещенной в центре O полого шара, является соленоидальным. Однако поток

этого поля через сферу с центром в точке O не равен нулю, т.е. это поле не имеет векторного потенциала. Действительно, рассматриваемое силовое поле описывается векторной функцией $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -G \frac{m_0}{r^3} \mathbf{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$. На сфере S с центром в точке O единичный вектор $\mathbf{n}(M)$ внешней нормали коллинеарен радиус-вектору \mathbf{r} точки M . Поэтому

$$\mathbf{a}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r} = -G \frac{m_0}{R^2},$$

где R — радиус сферы S , и поток Q_S векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через сферу S равен $-4\pi G m_0$.

Покажем, как можно построить векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$ соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ и запишем в координатах равенство $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Получим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} = a_1, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3}{\partial x_1} = a_2, \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = a_3. \end{cases}$$

Как уже отмечено выше, эта система имеет достаточно обширное множество решений, т.е. решение системы можно искать с большой степенью произвола. Положим $b_3 \equiv 0$. Тогда рассматриваемая система дифференциальных уравнений изменится следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_2}{\partial x_3} = -a_1, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_3} = a_2, \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = a_3. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$b_1(x_1, x_2, x_3) = \int a_2(x_1, x_2, x_2) dx_3 + \varphi(x_1, x_2)$$

и

$$b_2(x_1, x_2, x_3) = - \int a_1(x_1, x_2, x_2) dx_3 + \psi(x_1, x_2),$$

где $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ — неизвестные функции двух переменных. Подставляя эти выражения в третье уравнение системы и используя дифференцирование неопределенных интегралов по параметру, находим

$$\frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \int \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_3 + \int \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_3 + a_3.$$

Используя представление

$$a_3 = \int \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3$$

и равенство

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 0,$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0.$$

Несложно найти какое-либо решение этого уравнения. Например, можно просто взять $\varphi(x_1, x_2) \equiv \psi(x_1, x_2) \equiv 0$. В результате получим следующие формулы:

$$\begin{cases} b_1(x_1, x_2, x_3) = \int a_2(x_1, x_2, x_2) dx_3, \\ b_2(x_1, x_2, x_3) = - \int a_1(x_1, x_2, x_2) dx_3, \\ b_3(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{cases} \quad (7.66)$$

Пример 7.17. Построим векторный потенциал плоского соленоидального поля $v(M)$ скоростей твердого тела, вращающегося относительно некоторой оси с угловой скоростью Ω .

Выберем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, для которой ось Ox_3 совмещена с осью вращения. Тогда векторное поле $v(M)$ будет определяться векторной функцией $v(x_1, x_2, x_3) = (-\Omega x_2 \ \Omega x_1 \ 0)^T$ (см. пример 7.3) и координатными функциями векторного поля будут $v_1 = -\Omega x_2$, $v_2 = \Omega x_1$ и $v_3 = 0$. В соответствии с равенствами (7.66) получаем

$$b_1 = \int v_2 dx_3 = \Omega \int x_1 dx_3 = \Omega x_1 x_3,$$

$$b_2 = - \int v_1 dx_3 = \Omega \int x_2 dx_3 = \Omega x_2 x_3,$$

$$b_3 = 0.$$

Таким образом, векторный потенциал имеет вид

$$b(x_1, x_2, x_3) = (\Omega x_1 x_3 \ \Omega x_2 x_3 \ 0)^T. \quad (7.67)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\operatorname{rot} b = \Omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & 0 \end{vmatrix} = \Omega(-x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2) = v.$$

Вопросы и задачи

7.1. Убедиться, что гравитационный потенциал (7.2) материальной точки массой m_0 , помещенной в точку M_0 , и электростатический потенциал (7.3) помещенного в эту точку точечного заряда q_0 являются скалярными потенциалами центральных силовых полей, задаваемых при помощи (7.13) и (7.15) соответственно.

7.2. В чем различие между плоскопараллельным и плоским векторными полями?

7.3. Из курса физики известно, что при протекании электрического тока силой I по бесконечно длинному и тонкому прямолинейному проводу возникает магнитное поле. Вектор напряженности этого поля в точке M , не лежащей на проводе и имеющей радиус-вектор $r(M)$ с началом в любой точке провода, равен $H(M) = I \times r(M)$, где I — вектор, направление которого совпадает с направлением тока, причем $|I| = I$. В прямоугольной системе координат, ось Ox_3 которой совмещена с проводом, найти выражения для векторной функции, задающей напряженность указанного магнитного поля, ее координатных функций и уравнения векторных линий. Каковы свойства симметрии этого поля?

7.4. Какой вид имеют векторные поверхности, образованные векторными линиями центрального векторного поля, пересекающими произвольную прямую, не проходящую через центр этого поля? Что собой представляет векторная трубка такого поля?

7.5. Какой вид имеют векторные поверхности, образованные векторными линиями поля скоростей точек твердого тела, вращающегося относительно фиксированной оси (см. пример 7.6), если эти линии проходят через любую прямую, пересекающую эту ось? Что будет собой представлять векторная поверхность, образованная векторными линиями, пересекающими прямую, перпендикулярную оси вращения, если тело к тому же перемещается поступательно вдоль этой оси (см. пример 7.7)?

7.6. Вычислить дивергенцию векторного поля плотности теплового потока в стержне, рассмотренного в примере 7.4, и дать физическую интерпретацию полученного результата.

7.7. Вывести уравнение (7.59) из уравнения (7.58).

7.8. Убедиться, что найденная в примере 7.14 функция $u(x_1, x_2, x_3)$ является скалярным потенциалом заданного векторного поля.

7.9. Какой знак имеет поток (7.57) векторного поля вдоль векторной трубки, участок которой изображен на рис. 7.17?

7.10. Показать, что если $\mathbf{a}(M) = \text{rot } \mathbf{b}(M) = \text{rot } \mathbf{b}^*(M)$, $M \in D$, то разность векторных потенциалов \mathbf{b}^* и \mathbf{b} соленоидального векторного поля $\mathbf{a}(M)$ равна градиенту некоторого скалярного поля.

7.11. Показать, что циркуляция векторного поля, рассмотренного в примере 7.16, по контуре, k раз охватывающему ось Ox_3 , равна $4\pi kI$.

8. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Под векторным анализом обычно понимают раздел математики, в котором средствами дифференциального и интегрального исчисления изучают скалярные и векторные поля. Одна из особенностей векторного анализа состоит в том, что градиент скалярного поля, дивергенцию и ротор векторного поля, а также производные по направлению функций, задающих эти поля, можно представить при помощи одного оператора.

8.1. Оператор Гамильтона

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с правым ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Рассмотрим символический векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (8.1)$$

который в 1853 г. ввел В.Р. Гамильтон*, придумавший для него и символ ∇ в виде перевернутой греческой буквы Δ (дельта). Гамильтон называл символ ∇ словом „атлед“ (слово „дельта“, прочитанное наоборот), однако позже английские ученые, в том числе О. Хевисайд**, стали называть этот символ словом „набла“ из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы, а символический оператор (8.1) получил название *оператора Гамильтона*, или *оператора набла*.

Пусть в выбранной системе координат $Ox_1x_2x_3$ скалярное поле $u(M)$, $M \in D$, представлено дифференцируемой скаляр-

*В.Р. Гамильтон (1805–1865) — ирландский математик и механик.

**О. Хевисайд (1850–1925) — английский физик и инженер.

ной функцией $u(x_1, x_2, x_3)$, а векторное поле $\mathbf{a}(M)$, $M \in D$, — дифференцируемой векторной функцией $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ с координатными функциями $a_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Введем следующие правила операций с символом ∇ , совокупность которых часто называют ∇ -исчислением. В выражениях ∇u , $\nabla \mathbf{a}$, $\nabla \times \mathbf{a}$ символический вектор ∇ умножается на скаляр u или вектор \mathbf{a} по правилам умножения вектора на скаляр (вектора на число), скалярного умножения векторов и векторного умножения векторов соответственно. При этом под произведением координаты $\frac{\partial}{\partial x_i}$ символического вектора ∇ на скалярную функцию $u(x_1, x_2, x_3)$ или $a_j(x_1, x_2, x_3)$ следует понимать применение линейного дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial x_i}$ к этой функции, т.е. вычисление частной производной скалярной функции по переменному x_i . Таким образом,

$$\nabla u = \mathbf{e}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = \text{grad } u, \quad (8.2)$$

т.е. умножение оператора Гамильтона справа на скалярное поле дает градиент этого поля. Скалярное произведение оператора Гамильтона на векторное поле дает дивергенцию этого векторного поля:

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{a}. \quad (8.3)$$

Наконец, векторное произведение оператора Гамильтона на векторное поле дает ротор этого векторного поля:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}. \quad (8.4)$$

Мы видим, что оператор Гамильтона позволяет в простой форме представить основные дифференциальные операции векторного анализа — градиент, дивергенцию и ротор. В основе этих представлений лежат операции векторной алгебры и

интерпретация применения линейного дифференциального оператора к функции как умножение оператора на эту функцию справа.

Умножение линейного дифференциального оператора на функцию слева имеет другой смысл. Например, применение дифференциального оператора $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ к некоторой функции f означает вычисление частной производной этой функции по переменному x_1 с последующим умножением на скалярную функцию $h(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Такой смысл позволяет дать следующую интерпретацию выражениям $u \nabla$, $\mathbf{a} \nabla$ и $\mathbf{a} \times \nabla$. Выражение $u \nabla$ определяет векторный дифференциальный оператор

$$u \nabla = u \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (8.5)$$

с координатными дифференциальными операторами $u \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$. Выражение $\mathbf{a} \nabla$, в котором векторный оператор ∇ умножается скалярно слева на векторную функцию (векторное поле) \mathbf{a} определяет скалярный дифференциальный оператор

$$\mathbf{a} \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (8.6)$$

а выражение $\mathbf{a} \times \nabla$, содержащее символ векторного произведения, — векторный дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \nabla = & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - a_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \\ & + \mathbf{e}_2 \left(a_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_3 \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right). \quad (8.7) \end{aligned}$$

Здесь порядок строк в символическом определителе третьего порядка, использованном для записи векторного произведения,

задает и порядок сомножителей при его раскрытии. Векторные дифференциальные операторы (8.5), (8.7) подчиняются тем же правилам, что и оператор набла.

Рассмотрим некоторые случаи применения оператора Гамильтона. Пусть $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$ — некоторый единичный вектор. Его можно трактовать как постоянное векторное поле, на которое умножается по тем или иным правилам оператор Гамильтона. Дифференциальный оператор $\mathbf{n}\nabla$ действует по следующим правилам. Если u — скалярное поле, то

$$(\mathbf{n}\nabla)u = n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}(\nabla u), \quad (8.8)$$

т.е. применение оператора $\mathbf{n}\nabla$ к скалярному полю означает вычисление производной этого поля по направлению вектора \mathbf{n} . Точно так же действие этого оператора на векторное поле означает вычисление производной векторного поля по направлению вектора \mathbf{n} :

$$(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{a} = n_1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (8.9)$$

Векторное произведение $\mathbf{n} \times \nabla$ приводит к векторному дифференциальному оператору, действие которого на векторное поле \mathbf{a} , согласно (8.7), следующее:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \nabla)\mathbf{a} &= \left(n_2 \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_3} - n_3 \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_2} \right) + \left(n_3 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x_1} - n_1 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \left(n_1 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial x_2} - n_2 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial x_1} \right) = n_1 \left(\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x_3} \right) + n_2 \left(\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial x_1} \right) + \\ &+ n_3 \left(\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_2} \right) = \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Отметим, что выражение $\mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{a})$ имеет тот же смысл. Это позволяет и то и другое рассматривать как смешанное произведение трех символических векторов:

$$(\mathbf{n} \times \nabla)\mathbf{a} = \mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{a}) = \mathbf{n} \nabla \mathbf{a}.$$

Это смешанное произведение выражает завихренность векторного поля \mathbf{a} в направлении единичного вектора \mathbf{n} .

Подчеркнем, что выражения $\mathbf{n}\nabla\mathbf{a}$, $(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}(\nabla\mathbf{a})$ имеют разный смысл. Первое, как уже сказано, есть завихренность векторного поля, второе — производная векторного поля по направлению вектора \mathbf{n} , а третье — векторное поле $\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{a}$.

Пример 8.1. Пусть в пространственной области D задано скалярное поле $u = u(M)$. Выясним, с какой скоростью изменяется это поле вдоль параметрической кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (здесь параметр t может играть роль времени).

Выбрав прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, согласно правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}.$$

Правую часть этого равенства можно рассматривать как скалярное произведение вектора

$$\nabla u = \mathbf{e}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

на вектор

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e}_1 \frac{dx_1}{dt} + \mathbf{e}_2 \frac{dx_2}{dt} + \mathbf{e}_3 \frac{dx_3}{dt}$$

скорости движения точки вдоль заданной кривой. Поэтому можно записать

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{v}\nabla u = \mathbf{v}\operatorname{grad} u = v\mathbf{t}\operatorname{grad} u = v \frac{\partial u}{\partial t},$$

где \mathbf{t} — единичный касательный вектор к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Таким образом, скорость изменения поля $u(M)$ при движении точки M вдоль заданной кривой можно представить как произведение абсолютной величины $v = |\mathbf{v}|$ скорости движения этой точки и производной скалярного поля по направлению вектора касательной к кривой.

Пример 8.2. Вычислим $(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, т.е. $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$.

Используя представление (8.7), заключаем, что для дифференцируемых векторных полей \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - a_3 \frac{\partial}{\partial x_2} & a_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial x_3} & a_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^3 a_i \operatorname{grad} b_i - \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b}. \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

Используя полученную формулу и соотношения $\operatorname{grad} x_i = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$, находим

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i - 3\mathbf{r} = -2\mathbf{r}.$$

Пример 8.3. Оператор Гамильтона ∇ широко применяют в математических моделях различных физических процессов, например для записи уравнений электромагнитного поля. Электромагнитное поле описывается векторными полями $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ электрической и магнитной напряженности (здесь t — время, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки). Дополнительно, учитывая электрические и магнитные свойства материальной среды, рассматривают векторные поля электрической $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ и магнитной $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ индукции. Электромагнитные процессы в среде описываются системой уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}^{(e)}, & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \end{cases} \quad (8.11)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; $\mathbf{j}^{(e)}$ — вектор плотности электрического тока; ρ_e — объемная плотность электрического заряда. В записи уравнений Максвелла предполагается, что среда не-

подвижна относительно инерциальной системы отсчета, в которой введена прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$.

В однородных и изотропных средах векторные поля электрической и магнитной индукции, а также векторное поле плотности электрического тока выражаются через векторные поля электрической и магнитной индукции уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{j}^{(e)} = \gamma\mathbf{E},$$

где $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$ — электрическая и магнитная постоянные, которые связаны со скоростью $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ света в вакууме равенством $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$; ε и μ — безразмерные величины, характеризующие относительную диэлектрическую и магнитную проницаемость среды; γ — удельная электрическая проводимость. Отметим, что в вакууме $\varepsilon = \mu = 1$.

8.2. Свойства оператора Гамильтона

Как отмечено выше (см. 8.1), оператор Гамильтона ∇ обладает свойствами и вектора, и линейного дифференциального оператора. Поэтому при преобразовании выражений с этим оператором необходимо использовать как векторную алгебру, так и дифференциальное исчисление. Рассмотрим свойства оператора ∇ более подробно. Далее будем считать, что u и v — дифференцируемые скалярные поля, а \mathbf{a} и \mathbf{b} — дифференцируемые векторные поля, которые в заданной системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют координатные функции $a_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, и $b_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, соответственно.

1°. Для произвольных действительных чисел α и β

$$\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v, \quad (8.12)$$

$$\nabla(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \nabla \mathbf{a} + \beta \nabla \mathbf{b}, \quad (8.13)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \nabla \times \mathbf{a} + \beta \nabla \times \mathbf{b}. \quad (8.14)$$

2°. Для произвольных скалярных полей u , v и векторного поля \mathbf{a} верны равенства

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u, \quad (8.15)$$

$$\nabla(u\mathbf{a}) = u(\nabla\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla u), \quad (8.16)$$

$$\nabla \times (u\mathbf{a}) = u(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla u). \quad (8.17)$$

Эти равенства вытекают из свойств скалярного и векторного произведений и правила дифференцирования произведения функций. В приведенных равенствах проявляется общее правило дифференцирования произведения: в произведении дифференцируется каждый сомножитель при фиксированных других сомножителях, а затем все варианты складываются. Чтобы сформулировать общее правило такого рода, введем символ $*$, обозначая через $p * q$ либо произведение вектора p на скаляр q (вектора q на скаляр p), либо скалярное произведение векторных полей p и q , либо векторное произведение двух векторных полей.

3°. Для любых дифференцируемых полей p и q верно равенство

$$\nabla * (p * q) = \nabla * (p_C * q) + \nabla * (p * q_C), \quad (8.18)$$

где индекс C у векторного или скалярного поля означает, что при дифференцировании это поле рассматривается как постоянное и в дифференцировании не участвует.

4°. Если $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$ — произвольный вектор, то

$$\nabla(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{c}(\nabla \times \mathbf{a}), \quad (8.19)$$

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}(\nabla \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{a}, \quad (8.20)$$

$$\nabla(\mathbf{c} \mathbf{a}) = \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{a}. \quad (8.21)$$

Эти равенства легко установить, записав их в координатах. Например, для равенства (8.19) имеем

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (c_2 a_3 - c_3 a_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (c_3 a_1 - c_1 a_3) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} (c_1 a_2 - c_2 a_1) = -c_1 \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) - c_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) - \\ &- c_3 \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) = -\mathbf{c}(\nabla \times \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Равенство (8.19) можно рассматривать как правило циклической перестановки для символического смешанного произведения $\nabla \mathbf{c} \mathbf{a}$. Вообще говоря, перестановка сомножителей в символическом смешанном произведении не допустима, так как меняет положение сомножителя относительно векторного оператора, а значит, и действие этого оператора. Единственным исключением из этого положения является случай, когда один из сомножителей — постоянное векторное поле. Именно этот случай и зафиксирован в равенстве (8.19).

Равенству (8.20) также можно дать трактовку с точки зрения векторной алгебры. Для двойного векторного произведения известно тождество [III]

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (8.22)$$

Нетрудно увидеть, что равенство (8.20) внешне повторяет приведенное тождество, но при этом подчиняется определенным ограничениям на порядок сомножителей. Постоянное векторное поле \mathbf{c} поменяло свое положение относительно оператора Гамильтона, что допустимо, так как действие оператора на постоянное векторное поле не распространяется. Векторное поле \mathbf{a} не может менять своего положения относительно оператора ∇ , оставаясь справа от него.

Покажем, как с использованием свойств оператора Гамильтона можно вывести различные формулы векторного анализа.

Пример 8.4. а. Установим формулу для вычисления дивергенции векторного произведения двух дифференцируемых векторных полей \mathbf{a} и \mathbf{b} . Используя свойство 3°, находим

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}_C \times \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_C),$$

где индекс C , как и выше, означает, что соответствующее векторное поле не участвует в дифференцировании. Применяя равенство (8.19) к каждому из слагаемых, получаем

$$\nabla(\mathbf{a}_C \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

$$\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_C) = -\nabla(\mathbf{b}_C \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Остается сложить эти два равенства:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

б. Аналогичным образом можно получить формулу для ротора векторного произведения векторных полей \mathbf{a} и \mathbf{b} . Из свойства 3° вытекает, что

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a}_C \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_C).$$

К каждому из слагаемых применяем равенство (8.20):

$$\nabla \times (\mathbf{a}_C \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b},$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_C) = -\nabla \times (\mathbf{b}_C \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}.$$

Складывая равенства, получаем

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}.$$

в. Вычислим градиент скалярного произведения дифференцируемых векторных полей \mathbf{a} и \mathbf{b} . Применяя правило дифференцирования 3°, находим

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}_C \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \mathbf{b}_C), \quad (8.23)$$

где индекс C , как и выше, указывает на то, что векторное поле не участвует в дифференцировании. Используя равенство (8.21), заключаем, что

$$\nabla(\mathbf{a}C\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}, \quad \nabla(\mathbf{a}b_C) = \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}.$$

Складывая почленно два равенства, получаем

$$\text{grad}(\mathbf{a}b) = \nabla(\mathbf{a}b) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}. \quad \#$$

Подводя итог, сформулируем правила записи и получения формул векторного анализа с помощью оператора Гамильтона и основных операций векторной алгебры.

1. Оператор ∇ действует на все скалярные и векторные поля, стоящие справа от него, и не действует на поля, находящиеся слева от него.

2. Если стоящее справа от оператора ∇ выражение представляет собой линейную комбинацию скалярных или векторных полей, то действие оператора ∇ равносильно линейной комбинации его действий на каждое из этих полей.

3. Оператор ∇ , действующий на произведение скалярных и (или) векторных полей, следует применить, согласно правилу дифференцирования произведения, к каждому сомножителю отдельно, считая остальные постоянными, и результаты сложить, а затем каждое слагаемое, используя правила векторной алгебры, привести к такому виду, чтобы справа от оператора ∇ стоял только тот сомножитель (скалярное или векторное поле), который в данном слагаемом принят переменным.

8.3. Дифференциальные операции второго порядка

Вычисление градиента скалярного поля или дивергенции и ротора векторного поля связано с их однократным дифференцированием. Поэтому градиент, дивергенцию и ротор в

векторном анализе относят к *дифференциальным операциям первого порядка*. В результате выполнения какой-либо из этих операций возникает новое поле, скалярное или векторное. Если это поле оказывается дифференцируемым в некоторой области, то к нему можно снова применить одну из дифференциальных операций. Возникают операции, связанные с двукратным дифференцированием, которые в теории поля и векторном анализе называют *дифференциальными операциями второго порядка*.

Поскольку есть всего три дифференциальных операции первого порядка, комбинируя их различным способом, можно было бы получить девять дифференциальных операций второго порядка. Однако не все возможные комбинации операций первого порядка допустимы. Не имеют смысла выражения

$$\text{grad grad } u(M), \quad \text{grad rot } \mathbf{a}(M), \quad \text{div div } \mathbf{a}(M), \quad \text{rot div } \mathbf{a}(M),$$

поскольку операцию grad можно применить лишь к скалярному полю, а операции div и rot — только к векторному полю. Остается пять возможных комбинаций

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot grad } u = \nabla \times (\nabla u), \\ \text{div rot } \mathbf{a} = \nabla(\nabla \times \mathbf{a}), \\ \text{div grad } u = \nabla(\nabla u), \\ \text{grad div } \mathbf{a} = \nabla(\nabla \mathbf{a}), \\ \text{rot rot } \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}). \end{array} \right. \quad (8.24)$$

Все варианты представлены в табл. 8.1.

Первая операция в (8.24) приводит к векторному полю, тождественно равному нулю. В этом нетрудно убедиться непосредственной проверкой (см. 7.7). Отметим, что это согласуется со следующим свойством векторного произведения: $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ для любого вектора \mathbf{c} (в данном случае роль вектора \mathbf{c} играет векторный оператор ∇). Вторая операция в (8.24) также

Таблица 8.1

Внешняя операция	Внутренняя операция		
	Скалярное поле $u(M)$	Векторное поле $\mathbf{a}(M)$	
	$\text{grad } u$	$\text{div } \mathbf{a}$	$\text{rot } \mathbf{a}$
grad	—	$\text{grad div } \mathbf{a}$	—
div	$\text{div grad } u$	—	$\text{div rot } \mathbf{a} \equiv 0$
rot	$\text{rot grad } u \equiv 0$	—	$\text{rot rot } \mathbf{a}$

приводит к тривиальному результату, и это можно интерпретировать как равенство нулю смешанного произведения вида сса , в котором два сомножителя равны. Таким образом,

$$\text{rot grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0, \quad \text{div rot } \mathbf{a} = \nabla (\nabla \times \mathbf{a}) = 0. \quad (8.25)$$

Третью операцию в (8.24) можно выразить через скалярный квадрат ∇^2 векторного оператора Гамильтона:

$$\begin{aligned} \text{div grad } u &= \nabla (\nabla u) = (\nabla \nabla) u = \nabla^2 u = \\ &= \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u, \end{aligned}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (8.26)$$

скалярный дифференциальный оператор второго порядка, называемый *оператором Лапласа* (или *лапласианом*), который часто обозначают через Δ . Итак, дивергенция градиента скалярного поля равна лапласиану этого поля. Равенство нулю лапласиана скалярного поля означает, что представляющая это

поле скалярная функция удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией, а само скалярное поле есть потенциал лапласова поля.

Пример 8.5. Убедимся, что скалярное поле $u(M) = 1/r$, где r — расстояние от точки M до некоторой фиксированной точки M_0 , задается функцией, гармонической в любой области D , не содержащей точку M_0 . Имеем

$$\nabla u = \text{grad } u = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{du}{dr} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки M с началом в точке M_0 . Используя равенство (8.16) и учитывая, что, согласно примеру 7.10, $\nabla \mathbf{r} = \text{div } \mathbf{r} = 3$, получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \nabla(\nabla u) = \nabla\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} \nabla \mathbf{r} + \mathbf{r} \nabla\left(-\frac{1}{r^3}\right) = \\ &= -\frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \frac{r}{r} \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{r^2}{r} \frac{3}{r^4} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при $r \neq 0$ лапласиан скалярного поля $u = 1/r$ равен нулю, и это поле описывается функцией, гармонической в произвольной области D , не содержащей точку M_0 . Эту функцию называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве [XII]. #

Две оставшиеся в (8.24) дифференциальные операции второго порядка связаны соотношением

$$\text{grad div } \mathbf{a} = \text{rot rot } \mathbf{a} + (\text{div grad}) \mathbf{a}, \quad (8.27)$$

или

$$\nabla(\nabla \mathbf{a}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \nabla^2 \mathbf{a}, \quad (8.28)$$

где действие оператора Лапласа на векторное поле $\mathbf{a} = e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3$ реализуется как умножение числа на вектор, т.е. в соответствии с равенством

$$\nabla^2 \mathbf{a} = e_1 \nabla^2 a_1 + e_2 \nabla^2 a_2 + e_3 \nabla^2 a_3.$$

Равенство (8.28) можно получить, используя формулу (8.22) для двойного векторного произведения и правила обращения с оператором Гамильтона (см. 8.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \mathbf{a}) - (\nabla \nabla) \mathbf{a} = \\ &= \nabla (\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - (\operatorname{div} \operatorname{grad}) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Пример 8.6. Рассмотрим действие лапласиана на произведение двух скалярных полей $u(M)$ и $v(M)$. Используя равенства (8.15) и (8.16), находим

$$\begin{aligned} \nabla^2 (uv) &= \nabla (\nabla (uv)) = \nabla (u \nabla v + v \nabla u) = \nabla (u \nabla v) + \nabla (v \nabla u) = \\ &= (\nabla u) \nabla v + u \nabla (\nabla v) + (\nabla v) \nabla u + v \nabla (\nabla u) = \\ &= 2(\nabla u) \nabla v + u \nabla^2 v + v \nabla^2 u. \end{aligned}$$

8.4. Интегральные формулы

Из формулы Остроградского — Гаусса можно получить ряд интегральных соотношений, связывающих характеристики векторного поля в некоторой замкнутой пространственной области V и на ее границе S , в общем случае состоящей из нескольких непересекающихся замкнутых гладких поверхностей. Пусть \mathbf{a} — непрерывно дифференцируемое векторное поле в замкнутой области V . Запишем формулу Остроградского — Гаусса, используя оператор Гамильтона ∇ :

$$\oint_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_V \nabla \mathbf{a} dV, \quad (8.29)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

Пусть u и v — скалярные поля, дважды непрерывно дифференцируемые в V . Тогда векторное поле $\mathbf{a} = u \nabla v$ непрерывно дифференцируемо в V и, согласно равенству (8.16),

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla (u \nabla v) = u \nabla (\nabla v) + (\nabla v) \nabla u = u \nabla^2 v + (\nabla v) \nabla u.$$

Используя это равенство в формуле (8.29), получаем *первую формулу Грина*

$$\oint_S u(\nabla v)\mathbf{n} dS = \int_V u\nabla^2 v dV + \int_V (\nabla v)\nabla u dV. \quad (8.30)$$

Так как $(\nabla v)\mathbf{n}$, согласно (8.8), есть производная $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$ скалярного поля v по направлению вектора \mathbf{n} , то

$$\oint_S u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V u\nabla^2 v dV + \int_V (\nabla v)\nabla u dV. \quad (8.31)$$

Поменяв местами скалярные поля u и v , можем записать

$$\oint_S v(\nabla u)\mathbf{n} dS = \int_V v\nabla^2 u dV + \int_V (\nabla u)\nabla v dV.$$

Вычитая это равенство из равенства (8.30), приходим ко *второй формуле Грина*

$$\oint_S (u\nabla v - v\nabla u)\mathbf{n} dS = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dV, \quad (8.32)$$

или в иной записи

$$\oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dV. \quad (8.33)$$

Выбирая в качестве скалярных полей u и v одно и то же скалярное поле u , из (8.31) находим

$$\oint_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V u\nabla^2 u dV + \int_V |\nabla u|^2 dV. \quad (8.34)$$

Если в (8.31) положить $u(M) \equiv 1$, то получим

$$\oint_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_V \nabla^2 v dV. \quad (8.35)$$

Эта формула составляет суть утверждения *теоремы Гаусса*.

Используем вторую формулу Грина, чтобы получить интегральное представление скалярного поля u . Предположим, что поле $u(M)$ дважды непрерывно дифференцируемо в замкнутой области V , ограниченной гладкой поверхностью S .

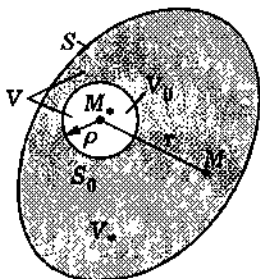


Рис. 8.1

Фиксируем некоторую точку $M_* \in V$. В примере 8.5 установлено, что скалярное поле $v(M) = 1/r$, где r — расстояние от точки M до точки M_* , удовлетворяет равенству $\nabla^2 v = 0$, $r \neq 0$. Пусть V_0 — открытый шар, ограниченный сферической поверхностью S_0 радиуса ρ с центром в точке M_* (рис. 8.1). В области $V_* = V \setminus V_0$ применим вторую формулу Грина в форме (8.33)

$$\begin{aligned} \oint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_0} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \\ = \int_{V_*} \left(-\frac{1}{r} \nabla^2 u \right) dV. \quad (8.36) \end{aligned}$$

В каждой точке M на сфере S_0 направление нормали, внешней по отношению к области V_* , противоположно направлению радиус-вектора, проведенного в эту точку из точки M_* , т.е. $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$. Поэтому интеграл по поверхности S_0 примет вид

$$\oint_{S_0} \left(-u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \right) dS = \oint_{S_0} \left(\frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS.$$

К этому интегралу применима *теорема о среднем* для поверхностных интегралов, которую можно сформулировать в следу-

ющем виде:

$$\oint_{S_0} \varphi(M) dS = 4\pi\rho^2\varphi(M_c),$$

где $M_c \in S_0$ — некоторая точка сферы S_0 . В результате получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{S_0} \left(\frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(4\pi\rho^2 \left(\frac{u(M_c)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{M_c} \right) \right) = \\ &= 4\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(u(M_c) + \rho \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{M_c} \right). \end{aligned}$$

При $\rho \rightarrow 0$ точка M_c стремится к точке M_* , а рассматриваемый интеграл имеет предел, равный $4\pi u(M_*)$. При этом область V_* переходит в исходную область V . Поэтому в пределе при $\rho \rightarrow 0$ из (8.36) получаем

$$4\pi u(M_*) = \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS - \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 u dV. \quad (8.37)$$

Если значение *лапласиана* поля u в каждой точке замкнутой области V известно, т.е. $\nabla^2 u(M) = -f(M)$, $M \in V$, где $f(M)$ — заданное скалярное поле, то равенство (8.37) приводит к интегральной формуле Грина [XII].

Теорема 8.1. Решение уравнения Пуассона*

$$\nabla^2 u = -f, \quad (8.38)$$

где f — непрерывная функция в \mathbb{R}^3 , существует и единственно в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(M) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial u(M)}{\partial r} = 0, \quad (8.39)$$

* С.Д. Пуассон (1781–1840) — французский механик, физик и математик.

где $r = r(M, M_*)$ — расстояние от точки M до произвольной наперед заданной точки M_* . Это решение может быть записано с помощью тройного интеграла в виде

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(M)}{r(M, M_0)} dV. \quad (8.40)$$

◀ Применим равенство (8.37) к сфере S радиуса R с центром в точке $M_* \in V$. В этом случае в точках $M \in S$ имеем $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, а равенство (8.37) примет вид

$$4\pi u(M_*) = \oint_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{u}{R^2} \right) dS - \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 u dV. \quad (8.41)$$

По условию поля $u(M)$ и $\frac{\partial u(M)}{\partial r}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(M) \Big|_{M \in S} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\partial u(M)}{\partial r} \Big|_{M \in S} = 0. \quad (8.42)$$

Значит, как и выше, для некоторой точки $M_c \in S$

$$\oint_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{u}{R^2} \right) dS = 4\pi R^2 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{M_c} + \frac{u(M_c)}{R^2} \right)$$

и, несмотря на неограниченное увеличение поверхности S , поверхностный интеграл в (8.41) при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{u}{R^2} \right) dS = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{M_c} + u(M_c) \right) = 0.$$

При этом замкнутая область V , ограниченная сферой S , займет все пространство, и мы получим представление

$$u(M_*) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r(M, M_*)} \nabla^2 u(M) dV, \quad (8.43)$$

где $r(M, M_*)$ — расстояние между точками M_* и M . Исключая лапласиан скалярного поля u с помощью уравнения Пуассона (8.38), приходим к представлению (8.40). ►

Правую часть представления (8.40) обычно называют объемным потенциалом с плотностью $f(M)$ [XII] (ньютоновским или кулоновским потенциалом, если поле $f(M)$ описывает соответственно распределение масс или электрических зарядов).

Пример 8.7. Рассмотрим частный случай, когда в уравнении Пуассона поле $f(M)$ принимает постоянное значение $C \neq 0$ в шаре V_0 радиуса R_0 с центром в точке M_0 и тождественно равно нулю вне этого шара. Тогда решение уравнения Пуассона в соответствии с представлением (8.40) имеет в точке $M_* \notin V_0$ значение

$$u(M_*) = \frac{C}{4\pi} \int_{V_0} \frac{dV}{r(M, M_*)}.$$

Для вычисления интеграла в правой части используем цилиндрические координаты ρ , φ , z , начало которых совпадает с центром шара V_0 , а ось Oz проходит через точку M_* . Обозначив $R_* = r(M_0, M_*)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \frac{dV}{r(M, M_*)} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R_0}^{R_0} dz \int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z - R_*)^2}} = \\ &= 2\pi \int_{-R_0}^{R_0} \sqrt{\rho^2 + (z - R_*)^2} \Big|_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} dz = \\ &= 2\pi \int_{-R_0}^{R_0} \left(\sqrt{R_*^2 + R_0^2 - 2R_*z - R_* + z} \right) dz = \frac{4\pi R_0^3}{3R_*}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$u(M_*) = \frac{CR_0^3}{3r(M_0, M_*)}. \quad (8.44)$$

Правую часть полученного представления можно рассматривать как потенциал центрального векторного поля $\mathbf{a}(M) = \nabla u(M)$ с центром в точке M_0 . #

Обратимся снова к формуле Остроградского — Гаусса, записанной в форме (8.29). Пусть в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ единичный вектор \mathbf{n} внешней нормали к замкнутой поверхности S имеет координаты n_1, n_2, n_3 . Рассмотрим скалярное поле $u(M)$, заданное в области G , включающей в себя поверхность S и ограниченную этой поверхностью область V . Под значением поверхностного интеграла

$$\int_S u \mathbf{n} dS$$

понимают вектор, координатами которого являются интегралы от функций un_1, un_2, un_3 — координатных функций подынтегрального выражения. Используем формулу Остроградского — Гаусса в применении к этим координатным функциям для преобразования поверхностного интеграла в тройной. Согласно формуле Остроградского — Гаусса,

$$\oint_S (u \mathbf{e}_1) \mathbf{n} dS = \oint_S un_1 dS = \int_V \frac{\partial u}{\partial x_1} dV.$$

Аналогичные равенства можно записать и для функций un_2, un_3 . В результате получим

$$\oint_S u \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{grad} u dV = \int_V \nabla u dV, \quad (8.45)$$

где объемный интеграл от векторного поля $\operatorname{grad} u$ понимают как вектор, координатами которого являются интегралы от координатных функций этого поля.

Теперь рассмотрим непрерывно дифференцируемое векторное поле

$$\mathbf{b} = e_1 b_1 + e_2 b_2 + e_3 b_3 \quad (8.46)$$

и преобразуем к тройному поверхностный интеграл

$$\int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) dS.$$

С этой целью введем вспомогательное векторное поле $\mathbf{a}(M) = \mathbf{b}(M) \times \mathbf{e}_1$, где \mathbf{e}_1 — базисный вектор выбранной прямоугольной системы координат. Умножая \mathbf{a} скалярно на вектор \mathbf{n} и используя свойства смешанного произведения, находим

$$\mathbf{a}\mathbf{n} = (\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1)\mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{b})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{n} \times \mathbf{b})_1,$$

где индекс 1 в данном случае обозначает первую координату вектора (проекцию на ось Ox_1). Аналогично

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla(\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \nabla \mathbf{b} = (\text{rot } \mathbf{b})_1.$$

Согласно формуле Остроградского — Гаусса,

$$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{b})_1 dS = \oint_S \mathbf{a}\mathbf{n} dS = \int_V \nabla \mathbf{a} dS = \int_V (\text{rot } \mathbf{b})_1 dV.$$

Аналогичные равенства верны и для двух других координатных осей. В результате получаем векторное равенство

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{b} dS = \int_V \text{rot } \mathbf{b} dV. \quad (8.47)$$

Формулы (8.29), (8.45) и (8.47), связывающие поверхностные и объемные (тройные) интегралы, иногда рассматривают как утверждения теорем, называемых теоремами Остроградского — Гаусса о дивергенции, градиенте и роторе соответственно.

Перейдем к рассмотрению представлений, вытекающих из теоремы Стокса. Формулу Стокса, записанную в векторной

форме (7.50), можно преобразовать, используя оператор Гамильтона. Пусть в области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(M)$. Выберем в G кусочно гладкую поверхность S , ограниченную кусочно гладким контуром L . Тогда формулу (7.50) можно представить в виде

$$\oint_L \mathbf{a} t ds = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \mathbf{n} dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \mathbf{n} dS, \quad (8.48)$$

где ds — дифференциал длины дуги контура L , а \mathbf{t} и \mathbf{n} — единичные векторы касательной к контуру L и нормали к поверхности S , причем направления этих векторов согласованы так, что обход контура L в направлении вектора \mathbf{t} происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n} .

Пусть u — непрерывно дифференцируемое скалярное поле в области G . Векторным линейным интегралом

$$\oint_L u \mathbf{t} ds$$

называют вектор, координатами которого являются линейные интегралы от координатных функций векторной функции $u \mathbf{t}$. Пусть вектор \mathbf{t} в заданной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет координаты t_1, t_2, t_3 . Тогда, согласно формуле (8.48),

$$\oint_L \mathbf{e}_1 u \mathbf{t} ds = \int_S (\nabla \times (\mathbf{e}_1 u)) \mathbf{n} dS = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) u \mathbf{e}_1 dS,$$

или

$$\oint_L u t_1 ds = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla)_1 u dS,$$

где индекс 1 внизу, как и выше, обозначает первую координату вектора (его проекцию на ось Ox_1). Аналогичные формулы

верны и для двух других координат. Все три равенства можно представить как векторное равенство

$$\oint_L \mathbf{u} t ds = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) u dS. \quad (8.49)$$

Теперь возьмем непрерывно дифференцируемое в G векторное поле $\mathbf{b}(M)$ и преобразуем векторный интеграл

$$\int_L (\mathbf{t} \times \mathbf{b}) ds$$

в поверхностный по поверхности S . Введем вспомогательное векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{e}_1$. Тогда

$$\mathbf{a} t = (\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1) t = (\mathbf{t} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_1 = (\mathbf{t} \times \mathbf{b})_1,$$

и поэтому

$$\mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{a}) = (\mathbf{n} \times \nabla)(\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1) = ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_1 = ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{b})_1.$$

Отсюда, согласно формуле Стокса (8.48), имеем

$$\oint_L (\mathbf{t} \times \mathbf{b})_1 ds = \int_S ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{b})_1 dS.$$

Аналогичные равенства можно получить по двум другим координатам. В результате

$$\oint_L (\mathbf{t} \times \mathbf{b}) ds = \int_S ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{b}) dS. \quad (8.50)$$

Используя дифференциал $d\mathbf{r} = t ds$ радиус-вектора точки, соотношения (8.48)–(8.50) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{a} d\mathbf{r} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \mathbf{n} dS, & \oint_L w d\mathbf{r} &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) w dS, \\ & & - \oint_L \mathbf{b} \times d\mathbf{r} &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{b} dS. \end{aligned}$$

Пример 8.8. Согласно закону Ампера на элемент $d\mathbf{l}$ проводника, по которому течет электрический ток силой I и который находится в магнитном поле с вектором магнитной индукции \mathbf{B} , действует сила $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Если проводник образует замкнутую петлю в форме кусочно гладкого контура L , то на эту петлю действует сила

$$\mathbf{F} = I \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B},$$

причем направление обхода контура L совпадает с направлением тока I . Отсюда, учитывая, что $d\mathbf{l} = \mathbf{t} ds$, в соответствии с (8.50) получаем

$$\mathbf{F} = I \oint_L \mathbf{t} \times \mathbf{B} ds = I \int_S ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}) dS, \quad (8.51)$$

где S — произвольная кусочно гладкая поверхность, ограниченная контуром L , а \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S , направление которого согласовано с направлением обхода контура L . Из (8.51) следует, что в однородном магнитном поле сила, действующая на контур с током, равна нулю.

Используя (8.10), находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} &= -\mathbf{n}(\nabla \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{n}_C \mathbf{B}) = \\ &= -\mathbf{n}(\nabla \mathbf{B}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Из уравнений Максвелла следует, что всюду $\nabla \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, где плотность электрического тока нулевая. Последнее условие выполнено в точках поверхности S , и, учитывая (8.52), вместо (8.51) получаем

$$\mathbf{F} = I \int_S (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{B} dS.$$

Если L — плоский контур, ограничивающий плоскую область площадью S с фиксированным направлением вектора \mathbf{n} , то с учетом (8.9) имеем

$$F = I \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (8.53)$$

В частном случае одномерного магнитного поля, вектор магнитной индукции которого изменяется лишь в направлении вектора \mathbf{n} , (8.53) переходит в равенство $F = IS \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n} \right)_L$, где $\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n} \right)_L$ — значение производной $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n}$ в плоскости контура L . Если при этом векторы \mathbf{B} и \mathbf{n} коллинеарны, то им коллинеарен и вектор F .

8.5. Обратная задача теории поля

Под обратной задачей теории поля понимают построение векторного поля по его дивергенции и ротору (иногда говорят о восстановлении векторного поля по его дивергенции и ротору).

Сначала убедимся, что произвольное векторное поле \mathbf{a} , заданное в области D , можно представить суммой потенциального \mathbf{a}' и соленоидального \mathbf{a}'' полей: $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}''$. Согласно определению потенциального поля, векторное поле \mathbf{a}' является градиентом $\text{grad} u$ некоторого скалярного поля u — потенциала векторного поля \mathbf{a}' . Определим, какой потенциал может иметь потенциальная составляющая векторного поля $\mathbf{a}(M)$, если известно скалярное поле $f = -\text{div} \mathbf{a}$.

Так как векторное поле \mathbf{a}'' по предположению соленоидальное, то в силу определения соленоидального поля в области D имеем $\text{div} \mathbf{a}'' = 0$. Поэтому

$$\nabla \mathbf{a}' = \text{div} \mathbf{a}' = \text{div} \mathbf{a} - \text{div} \mathbf{a}'' = -f.$$

Отсюда следует, что

$$\nabla^2 u = \nabla \mathbf{a}' = -f, \quad (8.54)$$

т.е. неизвестный потенциал u является решением уравнения Пуассона.

Уравнение Пуассона определяет поле u неоднозначно, так как вместе с u решением этого уравнения является любое поле $u + u_0$, полученное добавлением гармонической функции u_0 . Однако если на границе S области D известны значения поля u и значения его производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ по направлению внешней нормали \mathbf{n} к поверхности S , то это поле определено однозначно и его можно найти с помощью формулы (8.37).

Рассмотрим случай, когда область D есть все пространство. Для поля u потребуем выполнения условий (8.39). Тогда решение уравнения (8.54) единственно и его можно найти с помощью формулы (8.40):

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(M')}{r(M', M)} dV = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \mathbf{a}(M')}{r(M', M)} dV.$$

Соленоидальную составляющую векторного поля $\mathbf{a}(M)$ при известной потенциальной составляющей можно вычислить по формуле

$$\mathbf{a}''(M) = \mathbf{a}(M) - \nabla u(M) = \mathbf{a}(M) + \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \mathbf{a}(M')}{r(M', M)} dV(M') \right).$$

Теперь перейдем к построению векторного поля \mathbf{a} , заданного во всем пространстве, по известным его дивергенции $w = \operatorname{div} \mathbf{a}$ и ротору $\mathbf{b} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Предполагаем, что координатные функции векторного поля \mathbf{a} удовлетворяют условиям вида (8.39).

К равенству $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ применим операцию ротора и используем формулу (8.28):

$$\nabla \times \mathbf{b} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

Теперь учтем равенство $\nabla \mathbf{a} = \mathbf{w}$:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \mathbf{w} - \nabla \times \mathbf{b}.$$

Таким образом, векторное поле $\mathbf{a}(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{a} = -\mathbf{f}, \quad (8.55)$$

в котором $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{b} - \text{grad } w$.

Полученное уравнение является векторным и эквивалентно трем уравнениям для координатных функций $a_i(M)$ искомого векторного поля $\mathbf{a}(M)$, записанных в какой-либо прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\nabla^2 a_i = -f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.56)$$

где f_i — координатные функции векторного поля \mathbf{f} .

Если функции a_i удовлетворяют условиям вида (8.39), то решения уравнений (8.56) определены однозначно и их можно записать с помощью формулы (8.40):

$$a_i(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_i(M')}{r(M, M')} dV(M'), \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.57)$$

где $r(M, M')$ обозначает расстояние между точками M и M' .

Дополнение 8.1. Дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах

Напомним, что понятия *градиента скалярного поля*, *дивергенции* и *ротора векторного поля* не связаны с выбором какой-либо конкретной прямоугольной системы координат в пространстве. От выбора системы координат не зависят и свойства дифференциальных операций векторного анализа. Это обстоятельство значительно облегчает вычисления, связанные с исследованием полей.

Однако на практике не всегда можно ограничиться только прямоугольными системами координат. Так, в случае *центрального скалярного или векторного поля*, которое зависит лишь от расстояния до центра этого поля, удобнее использовать сферическую систему координат, а при исследовании *осесимметричных полей* предпочтительней оказывается цилиндрическая система координат. Сферическая и цилиндрическая системы координат являются частными случаями *системы криволинейных координат*.

Пусть в пространственной области D зафиксирована прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$. Рассмотрим три непрерывно дифференцируемые в D функции

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), \\ q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), \\ q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (8.58)$$

задающие взаимно однозначное отображение области D на некоторую область D_q . Пусть матрица Якоби $\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)$ этого отображения в каждой точке области D является невырожденной, а обратное отображение определяется непрерывно дифференцируемыми в D_q функциями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), \\ x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (8.59)$$

При этих условиях числа q_1, q_2, q_3 можно рассматривать как криволинейные координаты точки в области D .

Криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 характеризуются их поверхностями уровня

$$q_1(x_1, x_2, x_3) = C_1, \quad q_2(x_1, x_2, x_3) = C_2, \quad q_3(x_1, x_2, x_3) = C_3$$

(координатными поверхностями) и пересечениями этих поверхностей (координатными линиями). Координатные линии можно описать параметрическими уравнениями. Например, координатная линия $q_2 = C_2$, $q_3 = C_3$ может быть задана параметрически в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_1^*(q_1, C_2, C_3), \\ x_2 = x_2^*(q_1, C_2, C_3), \\ x_3 = x_3^*(q_1, C_2, C_3), \end{cases}$$

где параметром является переменная координата q_1 .

Параметрическое задание координатной линии позволяет легко получить координаты касательного к ней вектора. Координаты касательного вектора к координатной линии, вдоль которой изменяется координата q_j и которая проходит через точку $M \in D$, в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ равны

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right).$$

Соответствующий единичный касательный вектор имеет вид

$$\mathbf{q}_j = \frac{1}{H_j} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8.60)$$

где

$$H_j^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.61)$$

Коэффициенты H_j называют **параметрами Ламе***.

В дальнейшем будем рассматривать системы ортогональных криволинейных координат, для которых любые две координатные линии, проходящие через заданную точку $M \in D$, пересекаются в ней под прямым углом (рис. 8.2). Условием ортогональности координатных линий в каждой точке $M \in D$

*Г. Ламé (1795–1870) — французский математик и инженер.

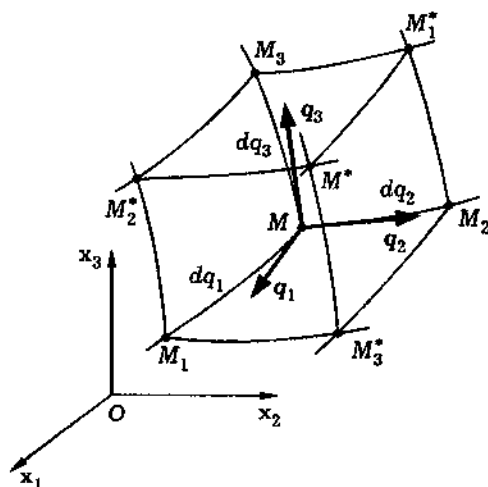


Рис. 8.2

будут три равенства $q_1 q_2 = 0$, $q_2 q_3 = 0$ и $q_3 q_1 = 0$, которые с учетом формул (8.60) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad k \neq j. \quad (8.62)$$

При выполнении условий (8.62) единичные векторы q_1 , q_2 , q_3 образуют ортонормированный базис, который называют базисом системы криволинейных координат. В отличие от базиса e_1 , e_2 , e_3 прямоугольной декартовой системы координат базис системы криволинейных координат изменяется от точки к точке. Однако при этом ориентация базиса системы криволинейных координат остается неизменной во всей рассматриваемой области D . В самом деле, столбцы координат векторов q_1 , q_2 , q_3 в прямоугольной системе координат представляют собой, согласно формулам (8.60), столбцы матрицы Якоби отображения (8.58). Но определитель матрицы Якоби, как функция многих переменных, определен и непрерывен в области D_q изменения криволинейных координат, причем он не обращается в нуль.

Следовательно, этот определитель сохраняет знак во всей области D_q . Но знак якобиана, равного смешанному произведению $q_1 q_2 q_3$, как раз и определяет ориентацию тройки векторов q_1, q_2, q_3 .

Квадрат дифференциала длины дуги гладкой кривой, заданной в криволинейных координатах, представим в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \right)^2.$$

Раскрывая скобки и учитывая формулы (8.60) для параметров Ламе и условия (8.62) ортогональности системы криволинейных координат, находим

$$ds^2 = \sum_{j=1}^3 H_j^2 dq_j^2. \quad (8.63)$$

Так как вдоль каждой из координатных линий изменяется лишь одна из трех криволинейных координат, то из (8.63) вытекает, что дифференциалы длин дуг координатных линий имеют вид

$$ds_j = H_j dq_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.64)$$

Следовательно, для шестигранника $MM_1M_2M_3M_1^*M_2^*M_3^*M^*$ с криволинейными гранями (см. рис. 8.2) дифференциал объема в ортогональных криволинейных координатах будет равен

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3, \quad (8.65)$$

а дифференциал площади любой его грани $MM_jM_i^*M_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k \neq i$, примет вид

$$dS_{jk} = ds_j ds_k = H_j H_k dq_j dq_k, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k. \quad (8.66)$$

Пример 8.9. Найдем дифференциалы длин дуг, объема и площади в цилиндрической и сферической системах координат

и установим связь между ортами базиса в этих системах с ортами e_i , $i = 1, 2, 3$, прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Цилиндрические координаты r , φ , z точки $M \in \mathbb{R}^3$ связаны с ее декартовыми координатами x_1 , x_2 , x_3 (при стандартном расположении двух систем координат) соотношениями [III]

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi, \\ x_3 = z. \end{cases} \quad (8.67)$$

Нетрудно убедиться в том, что столбцы матрицы Якоби отображения (8.67) ортогональны, т.е. цилиндрические координаты являются ортогональными. Вычислим параметры Ламе для цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned} H_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial r}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \end{aligned} \quad (8.68)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi}\right)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r, \end{aligned} \quad (8.69)$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1. \quad (8.70)$$

В соответствии с (8.64) дифференциалы длин дуг координатных линий в этой системе координат равны

$$ds_r = dr, \quad ds_\varphi = r d\varphi, \quad ds_z = dz,$$

а в соответствии с представлением (8.65) дифференциал объема равен $dV = r dr d\varphi dz$. Используя (8.66), находим дифференциалы площадок $dS_{r\varphi} = r dr d\varphi$, $dS_{\varphi z} = r d\varphi dz$ и $dS_{rz} = dr dz$.

Для ортов базиса в цилиндрической системе координат в соответствии с (8.60) и (8.67) получаем

$$\begin{cases} \mathbf{q}_r = \frac{1}{H_r} \left(e_1 \frac{\partial x_1}{\partial r} + e_2 \frac{\partial x_2}{\partial r} + e_3 \frac{\partial x_3}{\partial r} \right) = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi, \\ \mathbf{q}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi} \left(e_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + e_2 \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + e_3 \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right) = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi, \\ \mathbf{q}_z = \frac{1}{H_z} \left(e_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} + e_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} + e_3 \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) = e_3. \end{cases} \quad (8.71)$$

Убедимся, что базис $\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_\varphi, \mathbf{q}_z$ является правым. Для этого вычислим смешанное произведение трех векторов:

$$\mathbf{q}_r \mathbf{q}_\varphi \mathbf{q}_z = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Отметим, что полученные соотношения справедливы при $r > 0$, так как при $r = 0$ отображение (8.67) не является взаимно однозначным. Действительно, все точки множества

$$D_0 = \{(r; \varphi; z) \in \mathbb{R}^3: r = 0, \varphi \in [0, 2\pi), z = z_0\}$$

при отображении (8.67) переходят в одну точку с декартовыми координатами $x_1 = x_2 = 0, x_3 = z_0$.

Сферические координаты r, θ, φ (рис. 8.3) точки связаны с прямоугольными координатами x_1, x_2, x_3 (при их стандартном взаимном расположении) уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases} \quad (8.72)$$

Как и в случае цилиндрических координат, легко убедиться в том, что эти координаты ортогональные.

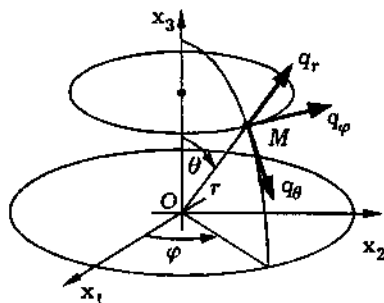


Рис. 8.3

В соответствии с (8.60) параметры Ламе для сферической системы координат имеют вид

$$\begin{aligned}
 H_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial r}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1, \quad (8.73)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_\theta &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \theta}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta} = r, \quad (8.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = r \sin \theta. \quad (8.75)
 \end{aligned}$$

Зная параметры Ламе, легко найти дифференциалы длин дуг координатных линий в этой системе координат:

$$ds_r = dr, \quad ds_\theta = r d\theta, \quad ds_\varphi = r \sin \theta d\varphi.$$

В соответствии с (8.65) для дифференциала объема получим $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, а в соответствии с (8.66) для дифферен-

циалов координатных площадок получим $dS_{r\theta} = r dr d\theta$, $dS_{\theta\varphi} = = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ и $dS_{r\varphi} = r \sin \theta dr d\varphi$.

Используя представление (8.60) базисных ортов в соответствующей прямоугольной системе координат, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_r &= \frac{1}{H_r} \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial x_1}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial x_2}{\partial r} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial x_3}{\partial r} \right) = \\ &= \mathbf{e}_1 \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_{\theta} &= \frac{1}{H_{\theta}} \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \right) = \\ &= \mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_3 \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}'_{\varphi} = \frac{1}{H_{\varphi}} \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right) = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi.$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_r \mathbf{q}'_{\theta} \mathbf{q}'_{\varphi} &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = 1, \end{aligned}$$

базис $\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_{\theta}, \mathbf{q}_{\varphi}$ является правым.

Отображение (8.72) теряет однозначность при $r = 0$: оно переводит множество $D_0^* = \{(\varphi; \theta) : \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$ в начало прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. рис. 8.3). Поэтому полученные для сферической системы координат соотношения справедливы лишь при $r > 0$. #

Приступим к вычислению в ортогональных криволинейных координатах градиента скалярного поля $u(M)$. Полагаем, что в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 это поле представлено непрерывно дифференцируемой функцией $u(q_1, q_2, q_3)$. Выберем произвольную точку $M \in D$. Ортонормированный базис $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2,$

\mathbf{q}_3 является базисом некоторой прямоугольной системы координат с началом в точке M . В этой системе координат градиент скалярного поля $u(M)$ в точке M записывается в виде

$$\text{grad } u(M) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{q}_j(M) \frac{\partial u}{\partial s_j} \Big|_M,$$

где $\frac{\partial u}{\partial s_j} \Big|_M$ обозначает производную поля $u(M)$ в точке M по направлению вектора \mathbf{q}_j . Учитывая запись производной по направлению в координатах, а также правило дифференцирования сложной функции, заключаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{1}{H_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{1}{H_j} \frac{\partial u}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где все частные производные вычисляются в точке M . В итоге получаем

$$\text{grad } u = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{q}_j}{H_j} \frac{\partial u}{\partial q_j}. \quad (8.76)$$

Казалось бы, равенство (8.76) позволяет для системы ортогональных криволинейных координат ввести аналог оператора Гамильтона ∇ в соответствии с формулой

$$\nabla^* = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{q}_j}{H_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (8.77)$$

и использовать этот оператор подобно обычному оператору Гамильтона. Однако у такого подхода нет тех преимуществ, которые мы имеем при использовании обычного оператора Гамильтона. Дело в том, что в случае криволинейных координат от точки к точке меняются не только координаты векторного поля, но и базисные векторы $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. При дифференцировании векторных полей в результате необходимо вводить поправки на изменение базисных векторов.

Формулы для вычисления дивергенции векторного поля $\mathbf{a}(M)$ найдем, исходя из представления дивергенции как плотности потока векторного поля через замкнутую поверхность, т.е. исходя из соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS, \quad (8.78)$$

где dV — диаметр подобласти $V \subset D$, ограниченной кусочно гладкой поверхностью S с единичным вектором \mathbf{n} внешней нормали.

В качестве подобласти V выберем ограниченный координатными поверхностями шестигранник $MM_1M_2M_3M_1^*M_2^*M_3^*M^*$ (см. рис. 8.2) и вычислим поток векторного поля \mathbf{a} через его грани. Нам необходимо предельное значение этого потока. Поэтому рассматриваемый шестигранник можно считать малым, а длины его ребер $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$ рассматривать как дифференциалы переменных q_1, q_2, q_3 .

Обозначим через a_i координатные функции векторного поля \mathbf{a} в координатах q_1, q_2, q_3 .

При этих предположениях заключаем, что поток через малую грань $MM_1M_3^*M_2$ с единичным вектором внешней нормали $-\mathbf{q}_3$ равен $Q_1 = -a_1 dS_{23} = -a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3$. Аналогично поток через противоположную грань $M_3M_1^*M^*M_2^*$ с единичным вектором внешней нормали \mathbf{q}_3 можно записать в виде

$$Q_1^* = \left(a_1 H_1 H_2 + \frac{\partial a_1 H_2 H_3}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3.$$

Точно так же можно записать потоки Q_2 и Q_2^* , Q_3 и Q_3^* через остальные грани. После сложения потоков через все шесть граней находим суммарный поток

$$Q_S = \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Разделив равенство на объем V шестигранника, равный $V = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$, и перейдя к пределу, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right). \quad (8.79)$$

Формулы для вычисления ротора в криволинейных ортогональных координатах можно найти аналогично, вычислив координаты ротора как предельные значения циркуляций векторного поля по соответствующим контурам, отнесенных к площадям, ограниченными контурами. Однако в данном случае удобен другой, более формальный путь.

Рассмотрим частный случай скалярного поля $u_j(M)$, заданного в криволинейных координатах функцией $u(q_1, q_2, q_3) = q_j$, которая зависит лишь от одной из криволинейных координат q_j . В этом случае из (8.76) получим $\operatorname{grad} u_j = \mathbf{q}_j / H_j$, что позволяет представить произвольное векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^3 a_j H_j \operatorname{grad} u_j.$$

Это дает возможность провести вычисления частично в прямоугольной системе координат. Используя формулу (7.48), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a}(M) &= \sum_{j=1}^3 \operatorname{rot}(a_j H_j \operatorname{grad} u_j) = \\ &= \sum_{j=1}^3 a_j H_j \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u_j) - \sum_{j=1}^3 (\operatorname{grad} u_j) \times \operatorname{grad}(a_j H_j) = \\ &= - \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{q}_j}{H_j} \times \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{q}_k}{H_k} \frac{\partial(a_j H_j)}{\partial q_k}. \quad (8.80) \end{aligned}$$

В правом ортонормированном базисе $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ верны соотношения $\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, и

$$\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3, \quad \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2.$$

С учетом этих соотношений правую часть в (8.80) можно упростить:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{q_1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3} \right) + \frac{q_2}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_1} \right) + \frac{q_3}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_2} \right). \quad (8.81)$$

Эту формулу можно представить при помощи определителя третьего порядка в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \frac{q_1}{H_2 H_3} & \frac{q_2}{H_3 H_1} & \frac{q_3}{H_1 H_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}. \quad (8.82)$$

В случае левого ортонормированного базиса \mathbf{q}_j , $j = 1, 2, 3$, знак правой части в (8.81) и (8.82) следует изменить на обратный.

Чтобы в криволинейных координатах получить формулу вычисления лапласиана скалярного поля, достаточно скомбинировать формулы для вычисления дивергенции и градиента. Градиент скалярного поля $u(M)$, заданного в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 функцией $u(q_1, q_2, q_3)$, может быть вычислен по формуле (8.76). Подставляя координаты вектора $\operatorname{grad} u$, представленные равенством (8.76), в формулу (8.79) вычисления дивергенции, получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right). \quad (8.83)$$

Пример 8.10. Найдем формулы вычисления дифференциальных операций теории поля в цилиндрической системе координат.

Учитывая формулы для коэффициентов Ламе в цилиндрической системе координат (см. пример 8.9), для скалярного поля $u(M)$ и векторного поля $\mathbf{a}(M)$ с координатными функциями a_r , a_φ , a_z в цилиндрической системе координат находим

$$\operatorname{grad} u = q_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{q_\varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + q_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{q_r}{r} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - r \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) + q_\varphi \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) + \frac{q_z}{r} \left(\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right).$$

Эти соотношения справедливы при $r > 0$ (см. пример 8.9).

Пример 8.11. Найдем формулы вычисления дифференциальных операций теории поля в сферической системе координат.

Учитывая формулы для коэффициентов Ламе в сферической системе координат (см. пример 8.9), для скалярного поля $u(M)$ и векторного поля $\mathbf{a}(M)$ с координатными функциями a_r , a_θ , a_φ в сферической системе координат находим

$$\operatorname{grad} u = q'_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{q_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{q_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{q'_r}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{q_\theta}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{q_\varphi}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right).$$

Как и в примере 8.10, эти соотношения справедливы лишь при $r > 0$ (см. пример 8.9).

Вопросы и задачи

8.1. Пусть в пространственной области D задана дифференцируемая векторная функция $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Найти скорость изменения этой функции при движении точки вдоль кривой, заданной векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

8.2. Вычислить $\nabla \times (\mathbf{c} \times f(\mathbf{r})\mathbf{r})$, где \mathbf{c} — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}|$ — длина радиус-вектора \mathbf{r} , а функция $f(r)$ дифференцируема.

8.3. Показать, что для производной $\mathbf{b}(\nabla \mathbf{a})$ векторного поля \mathbf{a} по направлению векторного поля \mathbf{b} верно равенство

$$2(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\nabla\mathbf{b}) + \\ + \mathbf{b}(\nabla\mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}).$$

8.4. Градиент скалярного поля кинетической энергии, приходящейся на единицу массы жидкости, выразить через векторное поле \mathbf{v} скоростей этой жидкости.

8.5. Доказать формулы

$$(\mathbf{a}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{r}), \quad \nabla\left(\frac{\mathbf{c}\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3}\right),$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ — векторная функция радиус-вектора \mathbf{r} точки, $r = |\mathbf{r}|$ и \mathbf{c} — постоянный вектор.

8.6. Найти градиент и лапласиан от функций $\mathbf{c}\mathbf{r}$, $\ln|\mathbf{r}|$ и $|\mathbf{r}|^m$, $m \in \mathbb{Z}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, а \mathbf{c} — постоянный вектор.

8.7. Вычислить дивергенцию, ротор и лапласиан векторных полей $\mathbf{c}\mathbf{r}$, $\mathbf{c}\ln|\mathbf{r}|$, $\mathbf{c}|\mathbf{r}|^m$ и $\mathbf{r}|\mathbf{r}|^m$, $m \in \mathbb{Z}$, где \mathbf{c} — постоянный вектор, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки. Для каждого из перечисленных векторных полей $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ найти $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$, $\nabla(\nabla \mathbf{a})$ и $(\mathbf{C}\nabla)\mathbf{a}$.

8.8. Найти градиент скалярного поля sr и дивергенцию векторного поля $r(sr)$, где s — постоянный вектор, а r — радиус-вектор точки.

8.9. Показать, что $v\nabla^2 u - u\nabla^2 v = \nabla(v\nabla u - u\nabla v)$, где u и v — дважды дифференцируемые в пространстве скалярные поля.

8.10. Показать, что знак смешанного произведения $q_1 q_2 q_3$ векторов (8.60) совпадает со знаком якобиана отображения (8.59).

8.11. Вывести формулу вычисления ротора векторного поля в криволинейных ортогональных координатах, используя представление проекций ротора как предельных циркуляций по контурам, отнесенных к площади, охватываемой контуром.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: В 2 т. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981. 448 с.

Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.

Волков Б.А. Численные методы. М.: Наука, 1982. 256 с.

Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы): В 2 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1980. 296 с.

Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1980. 448 с.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Продолжение курса / Под ред. А.Н. Тихонова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 358 с.

Казанджан Э.П. Интегральное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 60 с.

Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики: Прикладные вопросы анализа. М.: Высш. шк., 1976. 390 с.

Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Пер. с нем. и англ.: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1970. 672 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.

Мышкис А.Д. Математика для вузов: Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.

Наниев В.С., Феоктистов В.В., Галкин С.В. Дополнительные главы высшей математики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 56 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1985. 560 с.

Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

Толстов Г.П. Элементы математического анализа: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1974. 472 с.

Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.

Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.

Фитенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 3. М.: Наука, 1966. 656 с.

Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972. 622 с.

Справочные издания и монографии

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. Ю.С. Богданова. Минск: Выпэйш. шк., 1984. 528 с.

Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ: Справочное пособие для студентов вузов и инженеров: В 2 т. Т. 1. Минск: Выпэйш. шк., 1989. 288 с.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Дороговец А.Я. Математический анализ: Справочное пособие для преподавателей математики, инженерно-технических работников и студентов. Киев: Вища шк., 1985. 528 с.

Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров*. М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 320 с.

Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.

Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике: Пер. с англ. М.: Высш. шк., 1990. 256 с.

Задачники

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 1979. 400 с.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977. 528 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. *Б.П. Демидовича*. М.: Интеграл-пресс, 1997. 416 с.

Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.

Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высш. шк., 1994. 206 с.

Сборник задач по математике для вузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*. М.: Наука, 1986. 368 с.

Сборник задач по механике сплошной среды: В 2 т. / Под ред. *М.Э. Эглит*. М.: Московский Лицей, 1996. Т. 1. 396 с.; Т. 2. 394 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность интеграла двойного

32

-- кратного 181

-- определенного VI, 49

-- тройного 103

- меры 155

- площади 19

Астроида VI, 261

Бета-функция VI

Биекция I-74

Вектор нормальный плоскости III

Величина случайная XVI

-- двумерная XVI

-- непрерывная XVI

-- одномерная XVI

Выборка XVII

Гамма-функция VI

Геликоид прямой V, 333

Градиент скалярного поля 381

Граница поверхности 321

Диаметр разбиения 20, 80, 99, 165

Дивергенция 402

Дисперсия XVI

- выборочная XVII, 243

-- исправленная XVII, 243

Дифференциал длины дуги плоской
кривой II, 258

Длина кривой II

Завихренность 409

Замена переменных 191

Значение узловое 228

- функции среднее 37, 105, 183, 340

Измельчение разбиения 24, 169

Инвариантность площади 19

Интеграл Дарбу верхний VI, 26, 171

-- нижний VI, 26, 171

- двойной 21

- криволинейный второго рода 274

---- общего вида 275

-- первого рода 255

- Лапласа XVI, 243

- линейный 407

- несобственный второго рода 92,
202

-- от неограниченной функции по
ограниченной области 92

-- первого рода 84, 202

-- по неограниченной области 84

-- расходящийся 85, 203

-- сходящийся 85, 203

--- абсолютно 90

- поверхностный второго рода 348

-- первого рода 335

- повторный VI, 40

- Пуассона VI, 88

- Римана кратный 166

- тройной 100

- n -кратный несобственный 202

Интенсивность источника (стока)
401

Интервал доверительный XVII
 Источник векторного поля 400
 Исчерпывание монотонное 84, 201

Колебание функции VI

Компакт I-189, 27

Контур простой II, 278

Координаты криволинейные в
 плоской области 65

--- пространственной области 114

- полярные обобщенные 76

- сферические обобщенные 127

- точки барицентрические XIII, 228

--- сферические V, 118

--- цилиндрические V, 118

Косинус направляющий вектора III,
 347

Край поверхности 321

Кривая плоская II

- спрямляемая II

- трансверсальная векторному
 полю 396

Критерий Дарбу 176

- Римана 177

- существования двойного
 интеграла 26

-- кратного интеграла 177

-- тройного интеграла 101

Лалласиан 450

Лемма Дарбу 172

Лемниската Бернулли II, 262

Линейность интеграла двойного 30

-- кратного 180

-- тройного 102

Линия векторная 390

- силовая 390

Линия тока 391

Лист Мебиуса 326

Мера внешняя 155

- внутренняя 155

- (Жордана) множества 156

- промежутка n -мерного 153

Метод конечных элементов XIII

- Монте-Карло 238

- Рунге II, VI, 221

- статистических испытаний XIII,
 237

Многочлен интерполяционный

Лагранжа II, 223

Множество (жордановой) меры
 нуль 156

- измеримое (по Жордану) 155

- объема нуль 98

- площади нуль 18

- правильное 183

- частичное 164

- элементарное 154

Момент инерции геометрический
 VI, 139

-- осевой 129

-- относительно оси VI, 128

---- плоскости VI, 128

-- полярный 139

-- центробежный 135

- статический VI, 130

Монотонность интеграла кратного
 181

- меры 154

- площади 19

Неотрицательность меры 154

- площади 19

Нормаль к поверхности V, 322

- Область замкнутая квадрируемая
 17
 -- кубируемая 98
 -- многосвязная 293
 -- односвязная 293
 -- простая 196
 - интегрирования 21, 100
 -- правильная 46
 - многосвязная 292
 - объемно односвязная 364
 - односвязная 292
 - поверхностно односвязная 362
 - правильная 105
 - частичная 20, 79, 328
 - z -цилиндрическая 105
- Объединение разбиений 170
- Объем выборки XVII
 - тела VI, 98
- Ожидание математическое XVI
- Оператор Гамильтона 438
 - Лапласа 450
 - набла 438
- Операция дифференциальная
 второго порядка 449
 -- первого порядка 449
- Определение вероятности
 геометрическое XVI
- Ось тела центральная 133
- Отображение обратное I-75, 62
- Оценка XVII
- П**араметр кривой натуральный II
- Параметры Ламе 467
- Пластина 138
- Плоскость касательная V, 322
 - тела центральная 132
- Плотность поверхностная 138
 - распределения вероятностей XVI
- Площадь поверхности 80
 - фигуры плоской VI, 17
- Поверхность векторная 396
 - гладкая V, 322
 - двусторонняя 324
 - заданная неявно 319
 -- параметрически 320
 -- явно 319
 - замкнутая 321
 - квадрируемая 80
 - координатная 114
 - односторонняя 324
 - простая 321
 - цилиндрическая III, 15
- Поле 375
 - векторное 375
 -- безвихревое 417
 -- бесциркуляционное 417
 -- двумерное 384
 -- дифференцируемое 389
 -- лапласово 423
 -- неоднородное 384
 -- непрерывное 389
 -- нестационарное 384
 -- одномерное 384
 -- однородное 384
 -- осевое 387
 -- осесимметричное 387
 -- плоское 385
 -- плоскопараллельное 385
 -- потенциальное 417
 -- силовое 388
 -- соленоидальное 421
 -- стационарное 384
 -- трехмерное 385
 -- центральное 388
 - двумерное 377
 - неоднородное 376

- Поле однородное 376
 - скалярное 375
 -- дифференцируемое 380
 -- непрерывное 380
 -- нестационарное 376
 -- одномерное 378
 -- осевое 378
 -- осесимметричное 378
 -- плоское 377
 -- стационарное 377
 -- центральное 378
 - трехмерное 377
- Порядок точности квадратурной формулы VI
 -- кубатурной формулы 221
- Постоянная циклическая 312
- Потенциал векторный 430
 - (скалярный) 417
- Поток векторного поля 398
- Правило цепное V
- Производная скалярного поля по направлению 381
- Промежуток 153
 - n -мерный 153
- Разбиение** 20, 79, 328
 - множества 164
 - отрезка VI, 40
- Распределение равномерное XVI, 238
- Расстановка пределов интегрирования 108
- Расстояние между множествами IX, 171
- Ротор 410
- Среднее выборочное** XVII, 238
- Сток векторного поля 400
- Сторона поверхности 327
- Сумма Дарбу верхняя VI, 24
 -- нижняя VI, 24
 - интегральная 165
- Тело** VI, 98
 - кубиремое VI, 98
 - z -цилиндрическое 15
- Теорема Гаусса 454
 - об обратной функции V
 -- оценке интеграла двойного 35
 ----- по модулю 35
 ----- тройного 104
 ----- по модулю 103
 --- кратного интеграла 182
 ----- по модулю 182
 - о неявной функции V, 327
 -- среднем 340
 --- значения для интеграла двойного 36
 ----- кратного 183
 ----- тройного 104
 - Остроградского — Гаусса 406
 - Стокса 416
 - центральная предельная XVI, 242
- Тетраэдр 109
- Толщина пластины 138
- Тор V, 362
- Точка кривой начальная II
 - поверхности внутренняя 321
 -- неособая 322
 -- особая 322
 -- регулярная V, 322
- Трапеция криволинейная VI, 15
- Триангуляция замкнутой области 228
 - многоугольника V, 227
- Трубка векторная 397

- Угол телесный 400
 Узел интерполяции II
 – квадратурной формулы VI
 – кубатурной формулы 220
 Уравнение Лапласа XII, 423, 451
 Уравнения Максвелла XII, 443
 – поверхности параметрические V, 320
 Уровень доверия XVII, 243
 Условие Липшица I-208, VIII
- Ф**игура квадратуемая VI, 17
 Формула Грина вторая 453
 -- для многосвязной области 293
 --- односвязной области 288
 -- первая 453
 – квадратурная Гаусса VI
 – конечных приращений II
 – кубатурная 220
 – Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла 299
 – Остроградского — Гаусса 365
 – парабол VI
- Формула Симпсона VI, 213
 – средних VI
 – Стокса 356
 – трапеций VI
 Функция гармоническая XII, 423
 – Дирихле I-107, 23
 – интегрируемая 21, 99
 -- (по Риману) 165
 – распределения вероятностей XVI
 – формы конечного элемента XIII, 230
- Ц**ентр масс VI, 130
 -- геометрический 140
 Циркуляция векторного поля 407
- Ч**исло псевдослучайное XX
- Э**лемент объема 116
 – площади в криволинейных координатах 68, 330
 -- поверхности 330
- Я**кобиан V, 62, 113

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	11
1. Двойные интегралы	15
1.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла	15
1.2. Определение двойного интеграла	17
1.3. Условия существования двойного интеграла	24
1.4. Классы интегрируемых функций	27
1.5. Свойства двойного интеграла	29
1.6. Теоремы о среднем значении для двойного интеграла	36
1.7. Вычисление двойного интеграла	40
1.8. Криволинейные координаты на плоскости	62
1.9. Замена переменных в двойном интеграле	65
1.10. Площадь поверхности	79
1.11. Несобственные двойные интегралы	84
Вопросы и задачи	93
2. Тройные интегралы	97
2.1. Задача о вычислении массы тела	97
2.2. Определение тройного интеграла	98
2.3. Свойства тройного интеграла	102
2.4. Вычисление тройного интеграла	105
2.5. Замена переменных в тройном интеграле	113
2.6. Цилиндрические и сферические координаты	118
2.7. Приложения двойных и тройных интегралов	128
Вопросы и задачи	149
3. Кратные интегралы	153
3.1. Мера Жордана	153
3.2. Интеграл по измеримому множеству	164
3.3. Суммы Дарбу и критерии интегрируемости функции	168
3.4. Свойства интегрируемых функций и кратного интеграла	179
3.5. Сведение кратного интеграла к повторному	183
3.6. Замена переменных в кратном интеграле	190

3.7.	Кратные несобственные интегралы	201
	Вопросы и задачи	205
4.	Численное интегрирование	208
4.1.	Использование одномерных квадратурных формул	208
4.2.	Кубатурные формулы	219
4.3.	Многомерные кубатурные формулы	231
4.4.	Метод статистических испытаний	237
4.5.	Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло	247
	Вопросы и задачи	253
5.	Криволинейные интегралы	254
5.1.	Криволинейный интеграл первого рода	254
5.2.	Вычисление криволинейного интеграла первого рода	257
5.3.	Механические приложения криволинейного интеграла первого рода	265
5.4.	Криволинейный интеграл второго рода	274
5.5.	Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода	279
5.6.	Свойства криволинейного интеграла второго рода	285
5.7.	Формула Грина	288
5.8.	Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	296
5.9.	Вычисление криволинейного интеграла от полного диф- ференциала	306
Д.5.1.	Криволинейный интеграл в многосвязной области	310
	Вопросы и задачи	314
6.	Поверхностные интегралы	319
6.1.	О задании поверхности в пространстве	319
6.2.	Односторонние и двусторонние поверхности	323
6.3.	Площадь поверхности	327
6.4.	Поверхностный интеграл первого рода	334
6.5.	Приложения поверхностного интеграла первого рода	341
6.6.	Поверхностный интеграл второго рода	347
6.7.	Физический смысл поверхностного интеграла второго рода	353
6.8.	Формула Стокса	356
6.9.	Условия независимости криволинейного интеграла вто- рого рода от пути интегрирования в пространстве	362
6.10.	Формула Остроградского — Гаусса	364
	Вопросы и задачи	371

7. Элементы теории поля	375
7.1. Скалярное поле	375
7.2. Градиент скалярного поля	380
7.3. Векторное поле	383
7.4. Векторные линии	390
7.5. Поток векторного поля и дивергенция	397
7.6. Циркуляция векторного поля и ротор	407
7.7. Простейшие типы векторных полей	417
Д.7.1. Безвихревое поле в многосвязной области	424
Д.7.2. Векторный потенциал соленоидального поля	430
Вопросы и задачи	435
8. Основы векторного анализа	438
8.1. Оператор Гамильтона	438
8.2. Свойства оператора Гамильтона	444
8.3. Дифференциальные операции второго порядка	448
8.4. Интегральные формулы	452
8.5. Обратная задача теории поля	463
Д.8.1. Дифференциальные операции в ортогональных криво- линейных координатах	465
Вопросы и задачи	479
Список рекомендуемой литературы	481
Предметный указатель	484

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск VII**

**Гаврилов Валерий Рудольфович
Иванова Елена Евгеньевна
Морозова Валентина Дмитриевна**

**КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

*Редактор Н.Г. Ковалевская
Художник С.С. Водчиц
Корректор Е.В. Авалова*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством А.Н. Канатникова

Подписано в печать 22.10.03. Формат 60×88 1/16.

Печать офсетная. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 31,0. Уч.-изд. л. 28,60.

Тираж 3000 экз. Заказ № 9100

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-7038-1767-6



9 785703 817674